1. Welche der folgenden Aussagen zur Verifikation nach Hoare ist richtig?

A. Eine Formel, die sowohl vor der Ausführung des Programmes, wie auch nachher falsch ist, nennt man Invariante.

B. Mit Hilfe der Hoare Regeln kann die totale Korrektheit eines Programmes nachgewiesen werden.

C. Eine Zusicherung ist eine aussagenlogische Formel.

D. Das Hoare-Triple $\{Q\}\ P\ \{R\}$ drückt aus, dass die Zusicherung R gilt, wenn das Programm P nicht hält und Q sonst.

E. Ein Hoare-Triple besteht aus drei Komponenten: einem Programm und zwei Zusicherungen.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

A. Sei L eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann L nur dann von einer TM berechnet werden, wenn L regulär ist.

B. Für jede Sprache L, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.

C. Es gibt Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

D. Jede partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

E. Jede totale Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist rechtslinear.

E. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Aussagen zur Algebra ist falsch?

A. Seien A, B Boolesche Ausdrücke und f, g ihre Booleschen Funktionen. Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Algebra der Boolschen Funktionen.

B. Die Algebra der Booleschen Funktionen ist eine Algebra.

C. Jede binäre Operation hat maximal ein neutrales Element.

D. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a \in B$ gilt $\overline{\overline{a}} = a$.

E. Jede Algebra ist auch eine Boolesche Algebra.

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Booleschen Algebra ist richtig?

A. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a, b \in B$ gilt: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$.

B. Jeder Boolesche Ausdruck kann in eine disjunktive Normalform umgewandelt werden, nicht jedoch in eine konjunktive Normalform.

C. Die binäre Algebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra.

D. Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra, aber nicht jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

E. Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

---

6. Welche der folgenden Aussagen zur Aussagenlogik ist falsch?

A. Für jede Formel A existiert eine DNF D und eine KNF K, sodass $A \approx D \approx K$ gilt.

B. Wenn $A_1, \ldots, A, \ldots A_n \vdash B$ gilt, dann auch $A_1, \ldots, A_n \vdash A \to B$.

C. $A \approx B$ gilt gdw. $(A \to B) \land (B \to A)$ eine Tautologie ist.

D. Eine Formel A ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.

E. Jedes Axiomensystem für die Aussagenlogik ist vollständig.

---

7. Betrachten Sie die aussagenlogische Formel A:

$$(s \to t) \land (p \land q \to \neg p \lor \neg s)$$

a) Ist die Formel A *erfüllbar*? Begründen Sie Ihre Antwort! `[4 Punkte]`

b) Ist die Formel A eine *Tautologie*? Begründen Sie Ihre Antwort! `[4 Punkte]`

c) Wandeln Sie die Formel A in *Konjunktive Normalform* um. `[4 Punkte]`

c) Wandeln Sie die Formel A in *Disjunktive Normalform* um. `[4 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\cdot, +, \mathsf{1}, \mathsf{0}\}$, wobei die Stelligkeit von $\cdot$ und $+$ jeweils zwei und die Stelligkeit von $\mathsf{1}$ und $\mathsf{0}$ jeweils null ist.

$$\begin{aligned} x &= \mathsf{1} \\ \mathsf{1} + \mathsf{1} &= \mathsf{0} \\ \mathsf{0} + \mathsf{0} &= \mathsf{0} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash (\mathsf{0}+\mathsf{0}) \cdot \mathsf{0} = (\mathsf{1}+\mathsf{1}) \cdot \mathsf{1}$$

gilt. `[16 Punkte]`

---

9. Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, T\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind.

$$
\begin{aligned}
S &\to \mathsf{a} \mid \mathsf{b} \mid SS \mid T \mid \epsilon \\
T &\to \mathsf{cc} \mid TT
\end{aligned}
$$

a) Geben Sie $\mathsf{L}(G)$ in Mengennotation an. `[4 Punkte]`

b) Geben Sie eine Linksableitung in der Grammatik G für das Wort ccbbaa an. `[4 Punkte]`

c) Geben Sie einen Syntaxbaum in Bezug auf G für das Wort ccbbaa an. `[4 Punkte]`

d) Ist die Grammatik G mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeit: Schreiben Sie das `while`-Programm P für eine Registermaschine $R_! = ((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 5}, P)$, welche die Fakultät von n berechnet. Zur Erinnerung: die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Die Zahl n steht am Beginn in Register x_1. Das Programm soll das Ergebnis in Register x_2 schreiben. Verwenden Sie dazu das Hilfsprogramm $P_\times(x_i, x_j, x_k, x_l, x_m)$. Wird $P_\times$ mit den Werten (a, b, c, d, e) aufgerufen liefert es $(a \times b, b, a, 0, 0)$ als Ergebnis.

`[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version3"

Version 1: E E E E E E