1. Welche der folgenden Aussagen zur Berechenbarkeitstheorie ist richtig?

A. Jedes lösbare Problem ist auch algorithmisch lösbar.

B. Es ist möglich ein Turingmaschinenprogramm zu schreiben, welches testet ob eine beliebige Grammatik mehrdeutig ist.

C. Die Church-Turing These impliziert, dass jede bekannte Programmiersprache Turing-vollständig ist.

D. Turingmaschinen mit einem zweiseitig unbeschränkten Band sind echt mächtiger als TMs mit einem einseitig beschränkten Band.

E. Turingmaschinen können nur mit einem einseitig unbeschränkten Band definiert werden.

F. Die Church-Turing These impliziert, dass jeder Algorithmus auch als Registermaschinenprogramm ausgedrückt werden kann.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist falsch?

A. Alle Registermaschinenprogramme können mit nur drei Befehlen geschrieben werden.

B. Registermaschinenprogrammen sind deterministische Programme.

C. Registermaschinen sind Turing-vollständig.

D. Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, berechenbar auf einer RM R, existiert eine Turingmaschine M, sodass f M-berechenbar.

E. Jede Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer Turingmaschine berechenbar ist, ist auch auf einer RM berechenbar.

F. Jede RM kann in eine äquivalente kontextsensitive Grammatik umgewandelt werden.

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{F, W, V\}, \Sigma, R, F)$, wobei

$$\Sigma := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), \mathsf{False}, \mathsf{True}, p, q, r\}$$

und die Regeln R wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow V \mid W \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \rightarrow F) \\ W &\rightarrow \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \\ V &\rightarrow p \mid q \mid r \end{aligned}$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht beschränkt.

B. Die Grammatik ist nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist beschränkt, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

F. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$.

B. Für alle $a \in B$: $a + a = a$.

C. Es gilt also für alle $a, b, c \in B$: $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.

D. Für alle $a, b \in B$: $a \cdot b = b \cdot a$.

E. $\langle B; +, 0\rangle$ ist ein Monoid.

F. Für alle $a \in B$ gilt $a \cdot \overline{a} = 1$.

---

5. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	T	F
F	F	T

Stellen Sie die Wahrheitstabelle als aussagenlogische Formel über den Aussagenvariablen p und q dar, wobei p das erste und q das zweite Argument repräsentieren soll.

A. $\neg(p \vee \neg q) \to \mathsf{False}$.

B. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$.

C. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

D. $p \wedge (p \vee q)$.

E. $\neg p \vee q$.

F. $(p \to q) \wedge (q \to p)$

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gelten nicht?

A. $p \vee (q \wedge r) \approx (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

B. $p \vee \neg p \approx \mathsf{True}$.

C. $p \vee p \approx p$.

D. $p \rightarrow \mathsf{False} \approx \neg p$.

E. $\neg\neg p \approx p$.

F. $p \wedge (p \vee q) \approx \neg p$.

---

7. Aussagenlogik:

a) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$q \vee \neg q \approx (q \vee p) \rightarrow (q \rightarrow p \rightarrow q)$$

[4 Punkte]

b) Betrachten Sie die folgende Wahrheitsfunktion $f : \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^2 \rightarrow \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$, dargestellt durch Ihre Wahrheitstabelle:

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Verwenden Sie die Methode aus dem Skriptum um die disjunktive Normalform D von f anzugeben. [4 Punkte]

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \mathsf{a}\}$, wobei die Stelligkeit von f drei, von g und h jeweils eins und die Stelligkeit von a gleich null ist.

$$\mathsf{h}(x) \approx x$$
$$x \approx \mathsf{g}(x)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{a}), \mathsf{g}(x), \mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a}), x, \mathsf{a})$$

gilt. Begründen Sie Ihre Schritte mit Angabe der verwendeten Regel. `[8 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen:

a) Es sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \epsilon \Sigma^* \textit{enthält eine gerade Anzahl } \mathsf{a}\}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G für die Sprache L an. `[4 Punkte]`

b) Gegeben sei die beschränkte Grammatik $G = (\{\mathsf{S}, \mathsf{B}\}, \{a, b\}, R, \mathsf{S})$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathsf{S} &\rightarrow a\mathsf{S} \mid \mathsf{B} \mid b\mathsf{S} \\ a\mathsf{B} &\rightarrow ab \\ b\mathsf{S} &\rightarrow b\mathsf{S}b \\ \mathsf{S}b &\rightarrow aa \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitung für den String $abab$ an. `[4 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Schreiben Sie das `while`-Programm P für eine Registermaschine $R_{>} = ((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}, P)$, welche $n > m$ überprüft.

Am Beginn steht die Zahl n im Register x_1, die Zahl m im Register x_2 und eine unbekannte Zahl im Register x_3. Am Ende der Ausführung soll x_3 genau dann größer 0 sein wenn $n > m$ gilt. `[8 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "versionG"

```
Version 1:  F  F  F  F  F  F
```