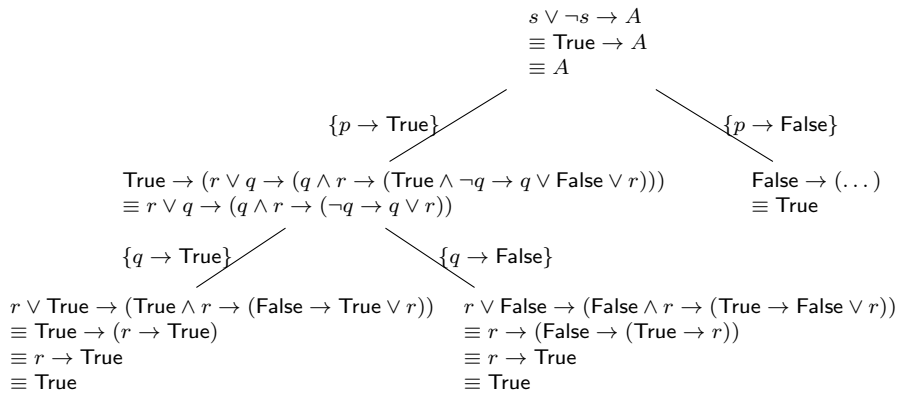
7. *Lösung.* Diese Formel ist eine Tautologie (also auch erfüllbar), da im folgenden Beweisbaum immer True herauskommt:

   Sei $A = p \to (r \vee q \to (q \wedge r \to (p \wedge \neg q \to q \vee \neg p \vee r)))$.



$\square$

8. *Lösung.* Laut *Eindeutigkeit des Komplements* (Lemma 2.10 im Skriptum) genügt es die beiden folgenden Gleichungen zu zeigen:

   1.) $(a \cdot b) + (\overline{a} + \overline{b}) = 1$

   2.) $(a \cdot b) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = 0$

   Zunächst zeigen wir 1.):

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) + (\overline{a} + \overline{b}) &= (a + \overline{a} + \overline{b}) \cdot (b + \overline{a} + \overline{b}) && \text{Distributivität} \\
&= (a + \overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + b + \overline{b}) && \text{Kommutativität} \\
&= (1 + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + 1) && 2 \times \text{ Komplement} \\
&= 1 \cdot 1 && 2 \times \text{ Gesetze für 0 und 1} \\
&= 1 && \text{Neutrales Element von } \cdot
\end{aligned}$$

   Nun zeigen wir 2.):

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) &= (a \cdot b \cdot \overline{a}) + (a \cdot b \cdot \overline{b}) && \text{Distributivität} \\
&= (a \cdot \overline{a} \cdot b) + (a \cdot b \cdot \overline{b}) && \text{Kommutativität} \\
&= (0 \cdot b) + (a \cdot 0) && 2 \times \text{ Komplement} \\
&= 0 + 0 && 2 \times \text{ Gesetze für 0 und 1} \\
&= 0 && \text{Neutrales Element von } +
\end{aligned}$$

   Also haben wir gezeigt, dass $\overline{a} + \overline{b}$ das Komplement von $a \cdot b$ ist. $\square$

9. *Lösung.* Rekursive Inferenz von abcbbaab in G:

	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	b	U	$U \to \mathsf{b}$	
2	ab	U	$U \to \mathsf{a}U$	1
3	cb	T	$T \to \mathsf{c}U$	1
4	bcbb	T	$T \to \mathsf{b}T\mathsf{b}$	3
5	abcbba	T	$T \to \mathsf{a}T\mathsf{a}$	4
6	abcbbab	S	$S \to TU$	$5, 2$

$\square$

10. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[z]}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[a]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[z]}{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[a]^2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\{odd(x_1+1)\}\ x_1 := x_1+1\ \{odd(x_1)\}}\,[z]}{\{x_1=2\}\ x_1 := x_1+1\ \{odd(x_1)\}}\,[a]^3}{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{odd(x_1)\}}\,[s]}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{odd(x_1)\}}\,[s]$$

[1] mit $(x_1 = 0) \models (x_1 + 1 = 1)$
[2] mit $(x_1 = 1) \models (x_1 + 1 = 2)$
[3] mit $(x_1 = 2) \models (odd(x1 + 1))$ $\square$