**1.** Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

---

**A.** Sei $L$ eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann $L$ nur dann von einer TM berechnet werden, wenn $L$ regulär ist.

**B.** Für jede Sprache $L$, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der $L$ akzeptiert.

**C.** Es gibt Funktionen $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

**D.** Jede partielle Funktion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

**E.** Jede totale Funktion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

---

**2.** Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist richtig?

---

**A.** Die Church–Turing-These besagt, dass alle Programmiersprachen Turing-vollständig sind.

**B.** Keine der Antworten.

**C.** Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

**D.** Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

**E.** Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt: $f$ ist berechenbar auf einer RM gdw. $f$ berechenbar auf einer TM.

---

**3.** Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln $R$ wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

---

**A.** Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

**B.** Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

**C.** Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

**D.** Die Grammatik ist rechtslinear.

**E.** Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

**4.** Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

---

**A.** Für alle $a \in B$: $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$.

**B.** Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$.

**C.** Für alle $a \in B$ gilt $\overline{\overline{a}} = a$.

**D.** Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \overline{a}$.

**E.** Für alle $a, b \in B$ gilt $a(\overline{a} + b) = ab$.

**F.** Für alle $a, b \in B$ gilt $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$.

---

**5.** Welche der folgenden Aussagen zur Booleschen Algebra ist richtig?

---

**A.** Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei $B$ die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a, b \in B$ gilt: $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$.

**B.** Jeder Boolesche Ausdruck kann in eine disjunktive Normalform umgewandelt werden, nicht jedoch in eine konjunktive Normalform.

**C.** Die binäre Algebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra.

**D.** Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra, aber nicht jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

**E.** Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

---

**6.** Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

---

**A.** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

**B.** $p \vee \neg p \equiv \mathsf{True}$.

**C.** $p \vee p \equiv p$.

**D.** $p \rightarrow \mathsf{False} \equiv \neg p$.

**E.** $\neg\neg p \equiv p$.

**F.** $p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p$.

---

**7. Algebra:** Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra mit der Trägermenge $B$. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in B$ die Eindeutigkeit des Komplements gilt:

$$Wenn\ a + b = 1\ und\ a \cdot b = 0,\ dann\ b = \overline{a}$$

Ergänzen Sie dazu den folgenden Beweis: [14 Punkte]

$$\begin{aligned}
b &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= b \cdot (a + \overline{a}) \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},\ da\ a \cdot b = 0 \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
&= (a + b) \cdot \overline{a} \\
&= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},\ da\ \underline{\qquad\qquad} \\
&= \overline{a}
\end{aligned}$$

Gilt die gezeigte Aussage auch für die binäre Algebra? [2 Punkte]

---

**8. Aussagenlogik:**

a) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$(p \vee q) \to (p \to q \to p) \approx p \vee \neg p$$

[8 Punkte]

b) Betrachten Sie die folgende Wahrheitsfunktion $f : \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^2 \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$, dargestellt durch Ihre Wahrheitstabelle:

| $s_1$ | $s_2$ | $f(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

Verwenden Sie die Methode aus dem Skriptum um die konjunktive Normalform $K$ von $f$ anzugeben. [8 Punkte]

---

**9.** Betrachten Sie den folgenden DEA $A = (\{1, 2, 3\}, \{0\}, \delta, 1, \{1, 3\})$, wobei $\delta$ wie folgt definiert ist:

| | 0 |
|---|---|
| $\rightarrow *1$ | 2 |
| 2 | 1 |
| $*3$ | 3 |

a) Geben Sie die Sprache des Automaten $A$, $\mathsf{L}(A)$ in Mengennotation an. [4 Punkte]
b) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G_1$ an, sodass $\mathsf{L}(M) = \mathsf{L}(G_1)$. [4 Punkte]

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_2 = \{\{S, U\}, \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}, R, S\}$, wobei die Regeln $R$ wie folgt definiert sind:

$$S \rightarrow \mathsf{1}U$$
$$U \rightarrow \mathsf{0}U \mid \mathsf{1}U \mid \mathsf{0}$$

c) Leiten Sie das Wort $\mathsf{10100}$ in $G_2$ ab. [4 Punkte]
d) Ist die Grammatik $G_2$ rechtslinear? Begründen Sie Ihre Antwort mit der Definition von rechtslinearen Grammatiken. [4 Punkte]

---

**10. Berechenbarkeitstheorie:** Gegeben sei die folgende Turingmaschine

$$M = (\{s, p, q, u, t, r\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup, \vdash\}, \sqcup, \vdash, \delta, s, t, r)$$

wobei die Übergangsfunktion wie folgt definiert ist:

| $p \in Q$ | $a \in \Gamma$ | $\delta(p, a)$ | $p \in Q$ | $a \in \Gamma$ | $\delta(p, a)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $\vdash$ | $(s, \vdash, R)$ | $p$ | $\sqcup$ | $(q, \sqcup, L)$ |
| $s$ | $\sqcup$ | $(t, \sqcup, R)$ | $q$ | $\mathsf{b}$ | $(u, \sqcup, L)$ |
| $s$ | $\mathsf{a}$ | $(p, \vdash, R)$ | $u$ | $\mathsf{b}$ | $(u, \mathsf{b}, L)$ |
| $p$ | $\mathsf{a}$ | $(p, \mathsf{a}, R)$ | $u$ | $\mathsf{a}$ | $(u, \mathsf{a}, L)$ |
| $p$ | $\mathsf{b}$ | $(p, \mathsf{b}, R)$ | $u$ | $\vdash$ | $(s, \vdash, R)$ |

a) Sind die Wörter $\epsilon$ bzw. $\mathsf{aabb}$ in der Sprache von $M$? [4 Punkte]

b) Gegeben sei die Startkonfiguration $(s, \vdash \mathsf{abb}\sqcup^\omega, 0)$. Führen Sie so lange wie möglich Rechenschritte mit der Rechenschrittrelation (für einen Schritt) auf Turingmaschinen aus und geben Sie die Sequenz der Konfigurationen an. [6 Punkte]

c) Welche Sprache beschreibt $M$? [6 Punkte]

---

**ANSWERKEY FOR "version3"**

Version 1: E E E F E F