Einführung in die Theoretische Informatik

Woche 3

Harald Zankl

Institut für Informatik @ UIBK
Wintersemester 2014/2015

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition

Die Formeln der Aussagenlogik sind induktiv definiert:

1. Eine atomare Formel p ist eine Formel,
2. ein Wahrheitswertsymbol (True, False) ist eine Formel, und
3. wenn A und B Formeln sind, dann sind

$$\neg A \qquad (A \land B) \qquad (A \lor B) \qquad (A \to B)$$

auch Formeln

Definition

Erweiterung der Belegung v zu einem Wahrheitswert $\bar{v}$ für Formeln anhand der Wahrheitstafeln für die Junktoren

Definition (Äquivalenz)

$A \equiv B$, wenn $A \models B$ und $B \models A$

Lemma (Distributivgesetze)

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Lemma (Gesetze von de Morgan)

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Satz

1. *A, B Formeln und E, F Teilformeln von A, B*
2. *Gelte $E \equiv F$*
3. *B ist das Resultat der Ersetzung von E durch F in A*

Dann gilt $A \equiv B$

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Methode von Quine

Lemma

Sei A eine Formel und p ein Atom in A.

Methode von Quine

Lemma

Sei A eine Formel und p ein Atom in A.

1. *A ist eine Tautologie gdw.*

$$A\{p \mapsto \mathsf{True}\} \textit{ ist Tautologie} \quad \textit{und} \quad A\{p \mapsto \mathsf{False}\} \textit{ ist Tautologie}$$

Methode von Quine

Lemma

Sei A eine Formel und p ein Atom in A.

1. *A ist eine Tautologie gdw.*

   $$A\{p \mapsto \mathrm{True}\} \textit{ ist Tautologie} \quad \textit{und} \quad A\{p \mapsto \mathrm{False}\} \textit{ ist Tautologie}$$

2. *A ist unerfüllbar gdw.*

   $$A\{p \mapsto \mathrm{True}\} \textit{ unerfüllbar} \quad \textit{und} \quad A\{p \mapsto \mathrm{False}\} \textit{ unerfüllbar}$$

Methode von Quine

Lemma

Sei A eine Formel und p ein Atom in A.

1. *A ist eine Tautologie gdw.*

$$A\{p \mapsto \mathsf{True}\} \text{ ist Tautologie} \quad \text{und} \quad A\{p \mapsto \mathsf{False}\} \text{ ist Tautologie}$$

2. *A ist unerfüllbar gdw.*

$$A\{p \mapsto \mathsf{True}\} \text{ unerfüllbar} \quad \text{und} \quad A\{p \mapsto \mathsf{False}\} \text{ unerfüllbar}$$

Beispiel

Wir betrachten die Formel F

$$F := (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{p} \to \mathsf{r})$$

Laut der Methode von Quine ist F eine Tautologie.

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r}) =: G$ ist Tautologie

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r) =: G$ ist Tautologie
2. $(\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)$ ist Tautologie

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \land q \to r) \land (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r) =: G$ ist Tautologie
2. $(\mathsf{False} \land q \to r) \land (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)$ ist Tautologie

Anforderungen in Baumform:

$$\begin{tikzcd}
 & (p \land q \to r) \land (p \to q) \to (p \to r) \arrow[dl, "\{p \mapsto \mathsf{True}\}"'] \arrow[dr, "\{p \mapsto \mathsf{False}\}"] & \\
G & & (\mathsf{False} \land q \to r) \land (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)
\end{tikzcd}$$

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \land q \rightarrow r) \land (\mathsf{True} \rightarrow q) \rightarrow (\mathsf{True} \rightarrow r) =: G$ ist Tautologie
2. $(\mathsf{False} \land q \rightarrow r) \land (\mathsf{False} \rightarrow q) \rightarrow (\mathsf{False} \rightarrow r)$ ist Tautologie

Anforderungen in Baumform:

$$(p \land q \rightarrow r) \land (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$\{p \mapsto \mathsf{True}\}$

$$G$$

$\{p \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \land q \rightarrow r) \land (\mathsf{False} \rightarrow q) \rightarrow (\mathsf{False} \rightarrow r)$$
$$\equiv$$
$$(\mathsf{False} \rightarrow r) \land \mathsf{True} \rightarrow \mathsf{True}$$

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r) =: G$ ist Tautologie
2. $(\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)$ ist Tautologie

Anforderungen in Baumform:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (p \wedge q \to r) \wedge (p \to q) \to (p \to r) \arrow[dl, "\{p \mapsto \mathsf{True}\}"'] \arrow[dr, "\{p \mapsto \mathsf{False}\}"] & \\
G & & (\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r) \\
\equiv\ &(\mathsf{False} \to r) \wedge \mathsf{True} \to \mathsf{True} \\
\equiv\ &\mathsf{True} \to \mathsf{True} \\
\equiv\ &\mathsf{True}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Methode von Quine liefert die folgenden Anforderungen

1. $(\mathsf{True} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r) =: G$ ist Tautologie
2. $(\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)$ ist Tautologie

Anforderungen in Baumform:

$$(p \wedge q \to r) \wedge (p \to q) \to (p \to r)$$

$$\xrightarrow{\{p \mapsto \mathsf{True}\}} G$$

$$\xrightarrow{\{p \mapsto \mathsf{False}\}} (\mathsf{False} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{False} \to q) \to (\mathsf{False} \to r)$$

$$\equiv (\mathsf{False} \to r) \wedge \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$

$$\equiv \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$

$$\equiv \mathsf{True}$$

Übrige Anforderungen

3. G ist Tautologie

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \wedge \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r})}^{G}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{True}\}$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{False}\}$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r})}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{True}\}$ $\swarrow$ $\searrow$ $\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{False}\}$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r})}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & (\mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{q} \to \mathsf{r} \arrow[dl, "\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{True}\}"'] \arrow[dr, "\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{False}\}"] & \\
(\mathsf{True} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{True} \to \mathsf{r} & & (\mathsf{False} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{False} \to \mathsf{r}
\end{tikzcd}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land q \to r) \land (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r)}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(q \to r) \land q \to r$$

$$\xrightarrow{\{q \mapsto \mathsf{True}\}} (\mathsf{True} \to r) \land \mathsf{True} \to r \equiv r \land \mathsf{True} \to r$$

$$\xrightarrow{\{q \mapsto \mathsf{False}\}} (\mathsf{False} \to r) \land \mathsf{False} \to r$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \wedge q \to r) \wedge (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r)}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(q \to r) \wedge q \to r$$

$\{q \mapsto \mathsf{True}\}$

$$(\mathsf{True} \to r) \wedge \mathsf{True} \to r$$

$$\equiv$$

$$r \wedge \mathsf{True} \to r$$

$$\equiv$$

$$r \to r$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{True}$$

$\{q \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \to r) \wedge \mathsf{False} \to r$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \wedge \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \wedge (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r})}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{q} \to \mathsf{r}) \wedge \mathsf{q} \to \mathsf{r}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{True}\}$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{r}) \wedge \mathsf{True} \to \mathsf{r}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{r} \wedge \mathsf{True} \to \mathsf{r}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{r} \to \mathsf{r}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{True}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \to \mathsf{r}) \wedge \mathsf{False} \to \mathsf{r}$$

$$\equiv$$

$$\mathsf{True} \wedge \mathsf{False} \to \mathsf{r}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land q \to r) \land (\mathsf{True} \to q) \to (\mathsf{True} \to r)}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(q \to r) \land q \to r$$

$\{q \mapsto \mathsf{True}\}$

$$(\mathsf{True} \to r) \land \mathsf{True} \to r$$
$$\equiv$$
$$r \land \mathsf{True} \to r$$
$$\equiv$$
$$r \to r$$
$$\equiv$$
$$\mathsf{True}$$

$\{q \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \to r) \land \mathsf{False} \to r$$
$$\equiv$$
$$\mathsf{True} \land \mathsf{False} \to r$$
$$\equiv$$
$$\mathsf{False} \to r$$
$$\equiv$$
$$\mathsf{True}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\overbrace{(\mathsf{True} \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land (\mathsf{True} \to \mathsf{q}) \to (\mathsf{True} \to \mathsf{r})}^{G}$$

$$\equiv$$

$$(\mathsf{q} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{q} \to \mathsf{r}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{True}\}$

$$(\mathsf{True} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{True} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{r} \land \mathsf{True} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{r} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{True}$$

$\{\mathsf{q} \mapsto \mathsf{False}\}$

$$(\mathsf{False} \to \mathsf{r}) \land \mathsf{False} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{True} \land \mathsf{False} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{False} \to \mathsf{r} \equiv \mathsf{True}$$

Es gibt keine weiteren Anforderungen mehr, also ist F eine Tautologie

Formales Beweisen

Modus Ponens

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ MP$$

Formales Beweisen

Modus Ponens

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}\ MP$$

Definition

Axiome für die Aussagenlogik nach Frege und Łukasiewicz

$$\begin{array}{ll} (1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ (2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ (3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \end{array}$$

Formales Beweisen

Modus Ponens

$$\frac{A \to B \quad A}{B}\ MP$$

Definition

Axiome für die Aussagenlogik nach Frege und Łukasiewicz

$$\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}$$

Die Axiome sind Schemata, das heißt A, B und C können für beliebige Formeln stehen

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz
$$B_1, \dots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein **Beweis** von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz

$$B_1, \ldots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$

   sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz
$$B_1, \dots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$
sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:
    - $B_i \in \mathcal{G}$

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz

$$B_1, \ldots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$

sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:

- $B_i \in \mathcal{G}$
- B_i ist eine Instanz eines der Axiome

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz
$$B_1, \ldots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$
sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:
    - $B_i \in \mathcal{G}$
    - B_i ist eine Instanz eines der Axiome
    - B_i folgt mit MP aus B_{i_1} und B_{i_2}, $i_1, i_2 < i$

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz
$$B_1, \ldots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$
sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:
   - $B_i \in \mathcal{G}$
   - B_i ist eine Instanz eines der Axiome
   - B_i folgt mit MP aus B_{i_1} und B_{i_2}, $i_1, i_2 < i$
2. B heißt beweisbar aus den Prämissen $\mathcal{G}$, wenn es einen Beweis von B aus $\mathcal{G}$ gibt

Formaler Beweis (Ableitung, Herleitung, Deduktion)

Definition

Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Menge von Formeln (Prämissen), B eine Formel

1. Ein Beweis von B aus $\mathcal{G}$ ist eine Sequenz
$$B_1, \ldots, B_\ell \text{ mit } B_\ell = B$$
sodass für alle $1 \leqslant i \leqslant \ell$ eine der folgenden Alternativen gilt:
   - $B_i \in \mathcal{G}$
   - B_i ist eine Instanz eines der Axiome
   - B_i folgt mit MP aus B_{i_1} und B_{i_2}, $i_1, i_2 < i$
2. B heißt beweisbar aus den Prämissen $\mathcal{G}$, wenn es einen Beweis von B aus $\mathcal{G}$ gibt

Definition

1. Die Beweisbarkeitsrelation $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ gilt, gdw. B aus $\{A_1, \ldots, A_n\}$ beweisbar ist.
2. Wenn $\vdash B$, dann nennen wir B beweisbar.

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \to q$:

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \to q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
(MP) & \dfrac{A \to B \quad A}{B}
\end{array}
$$

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \rightarrow q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(MP) & \dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1
2
3
4
5

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \to q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
(MP) & \dfrac{A \to B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2		
3		
4		
5		

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \rightarrow q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(MP) & \dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2		
3		
4		
5	$p \rightarrow q$	

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \to q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
(MP) & \dfrac{A \to B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Axiom (1)
3		
4		
5	$p \to q$	

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \rightarrow q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(MP) & \dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \rightarrow \neg p$	1, 2, *MP*
4		
5	$p \rightarrow q$	

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \rightarrow q$:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(MP) & \dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \rightarrow \neg p$	1, 2, *MP*
4	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Axiom (3)
5	$p \rightarrow q$	

Beispiel

Wir suchen einen Beweis für $\neg p \vdash p \to q$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
(MP) & \dfrac{A \to B \quad A}{B}
\end{array}
$$

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \to \neg p$	1, 2, MP
4	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	Axiom (3)
5	$p \to q$	3, 4, MP

Korrektheit und Vollständigkeit

Satz

Die Axiome (1), (2), (3) mit Inferenzregel MP sind korrekt und vollständig für die Aussagenlogik:

$$A_1, \ldots, A_n \models B \quad \textit{gdw.} \quad A_1, \ldots, A_n \vdash B \; .$$

Korrektheit und Vollständigkeit

Satz

Die Axiome (1), (2), (3) mit Inferenzregel MP sind korrekt und vollständig für die Aussagenlogik:

$$A_1, \ldots, A_n \models B \quad \textit{gdw.} \quad A_1, \ldots, A_n \vdash B \ .$$

Satz (Deduktionstheorem)

Sei B mit Hilfe der Prämisse A beweisbar, dann existiert ein Beweis von $A \rightarrow B$, der A nicht als Prämisse hat.

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

p	q	$\neg p \to (p \to q)$
T	T	T
T	F	T

p	q	$\neg p \to (p \to q)$
F	T	T
F	F	T

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}
$$

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}
$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

6 $\neg p \to (p \to q)$

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$(1) \quad A \to (B \to A)$$
$$(2) \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$
$$(3) \quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2		
3		
4		
5		
6	$\neg p \to (p \to q)$	

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$:

$$\begin{array}{ll}(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ (2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ (3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)\end{array}$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Axiom (1)
3		
4		
5		
6	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}
$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \to \neg p$	1, 2, *MP*
4		
5		
6	$\neg p \to (p \to q)$	

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
(2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
(3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)
\end{array}
$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \rightarrow \neg p$	1, 2, *MP*
4	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Axiom (3)
5		
6	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}
$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \to \neg p$	1, 2, *MP*
4	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	Axiom (3)
5	$p \to q$	3, 4, *MP*
6	$\neg p \to (p \to q)$	

Beispiel

Wir betrachten die Tautologie $\neg p \to (p \to q)$:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & A \to (B \to A) \\
(2) & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
(3) & (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)
\end{array}
$$

Nun zeigen wir die Gültigkeit mit folgenden Beweis:

1	$\neg p$	Prämisse
2	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Axiom (1)
3	$\neg q \to \neg p$	1, 2, *MP*
4	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	Axiom (3)
5	$p \to q$	3, 4, *MP*
6	$\neg p \to (p \to q)$	1, 5, *Deduktionstheorem*

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \ldots, B_\ell = B$$

nachgewiesen;

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \ldots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$;

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \dots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k ($1 \leqslant k \leqslant \ell$):

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \dots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k ($1 \leqslant k \leqslant \ell$):

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

1. Basis: $k = 1$; dann gilt $B_1 = B_k = A$ und die Behauptung, da $A \to A$ beweisbar

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \ldots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k ($1 \leqslant k \leqslant \ell$):

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

1. Basis: $k = 1$; dann gilt $B_1 = B_k = A$ und die Behauptung, da $A \to A$ beweisbar

2. Schritt: $k > 1$; die Induktionshypothese besagt

   Für alle $l < k$ ist $A \to B_l$ ohne die Prämisse A beweisbar

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \dots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k ($1 \leqslant k \leqslant \ell$):

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

1. BASIS: $k = 1$; dann gilt $B_1 = B_k = A$ und die Behauptung, da $A \to A$ beweisbar

2. SCHRITT: $k > 1$; die Induktionshypothese besagt

   Für alle $l < k$ ist $A \to B_l$ ohne die Prämisse A beweisbar

   Fallunterscheidung:

   - sei $B_k = A$ (wir argumentieren wie im Basisfall)

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \dots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$:

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

1. BASIS: $k = 1$; dann gilt $B_1 = B_k = A$ und die Behauptung, da $A \to A$ beweisbar

2. SCHRITT: $k > 1$; die Induktionshypothese besagt

   Für alle $l < k$ ist $A \to B_l$ ohne die Prämisse A beweisbar

   Fallunterscheidung:

   - sei $B_k = A$ (wir argumentieren wie im Basisfall)
   - sei B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

Beweis des Deduktionstheorems.

Angenommen B wird mit dem Beweis

$$B_1, \ldots, B_\ell = B$$

nachgewiesen; oBdA. gilt $B_1 = A$; wir zeigen die folgende Aussage mit Induktion nach k ($1 \leqslant k \leqslant \ell$):

$A \to B_k$ ist ohne die Prämisse A beweisbar

1. Basis: $k = 1$; dann gilt $B_1 = B_k = A$ und die Behauptung, da $A \to A$ beweisbar

2. Schritt: $k > 1$; die Induktionshypothese besagt

   Für alle $l < k$ ist $A \to B_l$ ohne die Prämisse A beweisbar

   Fallunterscheidung:

   - sei $B_k = A$ (wir argumentieren wie im Basisfall)
   - sei B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$
   - B_k folgt mit MP aus B_i, $B_j = (B_i \to B_k)$

Beweis des Deduktionstheorems.

- Fall B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

Beweis des Deduktionstheorems.

- Fall B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

- Fall B_k folgt mit MP aus B_i, $B_j = (B_i \to B_k)$

Beweis des Deduktionstheorems.

- Fall B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

  Wir verwenden folgenden Beweis:

1	B_k	Axiom oder Prämisse $\neq A$
2	$B_k \rightarrow (A \rightarrow B_k)$	Axiom (1)
3	$A \rightarrow B_k$	1, 2, MP

- Fall B_k folgt mit MP aus B_i, $B_j = (B_i \rightarrow B_k)$

Beweis des Deduktionstheorems.

- Fall B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

  Wir verwenden folgenden Beweis:

1	B_k	Axiom oder Prämisse $\neq A$
2	$B_k \to (A \to B_k)$	Axiom (1)
3	$A \to B_k$	1, 2, MP

- Fall B_k folgt mit MP aus B_i, $B_j = (B_i \to B_k)$

  Wir verwenden folgenden Beweis:

1	Beweis von $A \to B_i$	IH
2	Beweis von $A \to (B_i \to B_k)$	IH
3	$(A \to (B_i \to B_k)) \to (A \to B_i) \to (A \to B_k)$	Axiom (2)
4	$(A \to B_i) \to (A \to B_k)$	2, 3, MP
5	$A \to B_k$	1, 4, MP

Beweis des Deduktionstheorems.

- Fall B_k ein Axiom oder eine Prämisse $\neq A$

  Wir verwenden folgenden Beweis:

1	B_k	Axiom oder Prämisse $\neq A$
2	$B_k \to (A \to B_k)$	Axiom (1)
3	$A \to B_k$	1, 2, MP

- Fall B_k folgt mit MP aus B_i, $B_j = (B_i \to B_k)$

  Wir verwenden folgenden Beweis:

1	Beweis von $A \to B_i$	IH
2	Beweis von $A \to (B_i \to B_k)$	IH
3	$(A \to (B_i \to B_k)) \to (A \to B_i) \to (A \to B_k)$	Axiom (2)
4	$(A \to B_i) \to (A \to B_k)$	2, 3, MP
5	$A \to B_k$	1, 4, MP

■

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Definition

Eine Wahrheitsfunktion $f\colon \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}^n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ ist eine Funktion, die n Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zuordnet

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Definition

Eine Wahrheitsfunktion $f\colon \{T, F\}^n \to \{T, F\}$ ist eine Funktion, die n Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zuordnet

Definition

Sei $f\colon \{T, F\}^n \to \{T, F\}$ eine Wahrheitsfunktion; wir definieren:

$$\mathrm{TV}(f) := \{(s_1, \ldots, s_n) \mid f(s_1, \ldots, s_n) = T\}$$

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Definition

Eine Wahrheitsfunktion $f\colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ ist eine Funktion, die n Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zuordnet

Definition

Sei $f\colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ eine Wahrheitsfunktion; wir definieren:

$$\mathsf{TV}(f) := \{(s_1, \dots, s_n) \mid f(s_1, \dots, s_n) = \mathsf{T}\}$$

Definition

1. Ein Literal ist ein Atom p oder die Negation eines Atoms $\neg p$

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Definition

Eine Wahrheitsfunktion $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ ist eine Funktion, die n Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zuordnet

Definition

Sei $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ eine Wahrheitsfunktion; wir definieren:

$$\mathrm{TV}(f) := \{(s_1,\dots,s_n) \mid f(s_1,\dots,s_n) = \mathsf{T}\}$$

Definition

1. Ein Literal ist ein Atom p oder die Negation eines Atoms $\neg p$
2. Eine Formel A ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn A eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Definition

Eine Wahrheitsfunktion $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ ist eine Funktion, die n Wahrheitswerten einen Wahrheitswert zuordnet

Definition

Sei $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ eine Wahrheitsfunktion; wir definieren:

$$\mathrm{TV}(f) := \{(s_1,\dots,s_n) \mid f(s_1,\dots,s_n) = \mathsf{T}\}$$

Definition

1. Ein Literal ist ein Atom p oder die Negation eines Atoms $\neg p$
2. Eine Formel A ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn A eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist
3. Eine Formel A ist in konjunktiver Normalform (KNF), wenn A eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist

Lemma

- *Sei* $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ *eine Wahrheitsfunktion mit* $\mathsf{TV}(f) \neq \varnothing$, $\mathsf{TV}(f) \neq \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n$

Lemma

- *Sei* $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ *eine Wahrheitsfunktion mit* $\mathsf{TV}(f) \neq \varnothing$, $\mathsf{TV}(f) \neq \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n$
- *Seien* $p_1, \ldots, p_n$ *atomare Formeln*

Lemma

- *Sei* $f\colon \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}^n \to \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}$ *eine Wahrheitsfunktion mit* $\mathrm{TV}(f) \neq \varnothing$, $\mathrm{TV}(f) \neq \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}^n$
- *Seien* $p_1, \ldots, p_n$ *atomare Formeln*
- *Sei DNF* D *definiert als:*

$$D := \bigvee_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathrm{TV}(f)} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

wobei $A_i = p_i$, *wenn* $s_i = \mathrm{T}$ *und* $A_i = \neg p_i$ *sonst*

Lemma

- *Sei* $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ *eine Wahrheitsfunktion mit* $\mathsf{TV}(f) \neq \varnothing$, $\mathsf{TV}(f) \neq \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n$
- *Seien* $p_1, \ldots, p_n$ *atomare Formeln*
- *Sei DNF* D *definiert als:*

$$D := \bigvee_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathsf{TV}(f)} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

  wobei $A_i = p_i$, *wenn* $s_i = \mathsf{T}$ *und* $A_i = \neg p_i$ *sonst*
- *Sei KNF* K *definiert als:*

$$K := \bigwedge_{(s_1,\ldots,s_n)\notin\mathsf{TV}(f)} \bigvee_{j=1}^{n} B_j$$

  wobei $B_j = p_j$, *wenn* $s_j = \mathsf{F}$ *und* $B_j = \neg p_j$ *sonst*

Lemma

- *Sei* $f\colon \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n \to \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}$ *eine Wahrheitsfunktion mit* $\mathsf{TV}(f) \neq \varnothing$, $\mathsf{TV}(f) \neq \{\mathsf{T},\mathsf{F}\}^n$
- *Seien* $p_1, \ldots, p_n$ *atomare Formeln*
- *Sei DNF* D *definiert als:*

$$D := \bigvee_{(s_1,\ldots,s_n)\in \mathsf{TV}(f)} \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

  wobei $A_i = p_i$, *wenn* $s_i = \mathsf{T}$ *und* $A_i = \neg p_i$ *sonst*
- *Sei KNF* K *definiert als:*

$$K := \bigwedge_{(s_1,\ldots,s_n)\notin \mathsf{TV}(f)} \bigvee_{j=1}^{n} B_j$$

  wobei $B_j = p_j$, *wenn* $s_j = \mathsf{F}$ *und* $B_j = \neg p_j$ *sonst*
- *Die Wahrheitstabellen von* D *und* K *entsprechen der Wahrheitsfunktion* f

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*
2. *Jede Formel mit n Atomen induziert eine Wahrheitsfunktion in n Variablen*

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*
2. *Jede Formel mit n Atomen induziert eine Wahrheitsfunktion in n Variablen*

Beweis.

1. Es fehlen die Fälle mit trivialer Wahrheitsfunktion:
   - $\mathrm{TV}(f) = \varnothing$
   - $\mathrm{TV}(f) = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}^n$

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*
2. *Jede Formel mit n Atomen induziert eine Wahrheitsfunktion in n Variablen*

Beweis.

1. Es fehlen die Fälle mit trivialer Wahrheitsfunktion:
   - $\mathrm{TV}(f) = \varnothing$
   - $\mathrm{TV}(f) = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}^n$
2. Setze $D = K := p \wedge \neg p$ im ersten Fall
3. Setze $D = K := p \vee \neg p$ im zweiten Fall

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*
2. *Jede Formel mit n Atomen induziert eine Wahrheitsfunktion in n Variablen*

Beweis.

1. Es fehlen die Fälle mit trivialer Wahrheitsfunktion:
   - $\mathrm{TV}(f) = \varnothing$
   - $\mathrm{TV}(f) = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}^n$
2. Setze $D = K := p \wedge \neg p$ im ersten Fall
3. Setze $D = K := p \vee \neg p$ im zweiten Fall ∎

Satz

1. *Jede Wahrheitsfunktion kann als DNF oder KNF ausgedrückt werden*
2. *Jede Formel mit n Atomen induziert eine Wahrheitsfunktion in n Variablen*

Beweis.

1. Es fehlen die Fälle mit trivialer Wahrheitsfunktion:
   - $\mathrm{TV}(f) = \varnothing$
   - $\mathrm{TV}(f) = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}^n$
2. Setze $D = K := p \land \neg p$ im ersten Fall
3. Setze $D = K := p \lor \neg p$ im zweiten Fall

Folgerung

Für jede Formel A existiert eine DNF D und eine KNF K, sodass $A \equiv D \equiv K$ gilt.

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

$$\mathsf{TV}(\oplus) = \{(\mathsf{F}, \mathsf{T}), (\mathsf{T}, \mathsf{F})\}$$

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

$$\mathsf{TV}(\oplus) = \{(\mathsf{F}, \mathsf{T}), (\mathsf{T}, \mathsf{F})\}$$

p	q	p $\oplus$ q	Disjunktion
F	F	F	
T	T	F	

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p ⊕ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

$$\mathrm{TV}(\oplus) = \{(\mathrm{F}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{F})\}$$

p	q	p ⊕ q	Disjunktion
F	F	F	$p_1 \vee p_2$
T	T	F	

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

$$\mathrm{TV}(\oplus) = \{(\mathrm{F}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{F})\}$$

p	q	p $\oplus$ q	Disjunktion
F	F	F	$p_1 \vee p_2$
T	T	F	$\neg p_1 \vee \neg p_2$

Beispiel

Die folgende Operation ($\oplus$) wird XOR genannt:

p	q	p $\oplus$ q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Wir erstellen die KNF:

$$\mathrm{TV}(\oplus) = \{(\mathrm{F}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{F})\}$$

p	q	p $\oplus$ q	Disjunktion	KNF
F	F	F	$p_1 \vee p_2$	
T	T	F	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	$(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$