

Einführung in die Theoretische Informatik

Woche 8

Harald Zankl

Institut für Informatik @ UIBK
Wintersemester 2014/2015



Zusammenfassung

Definition

Eine **Grammatik** G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, wobei

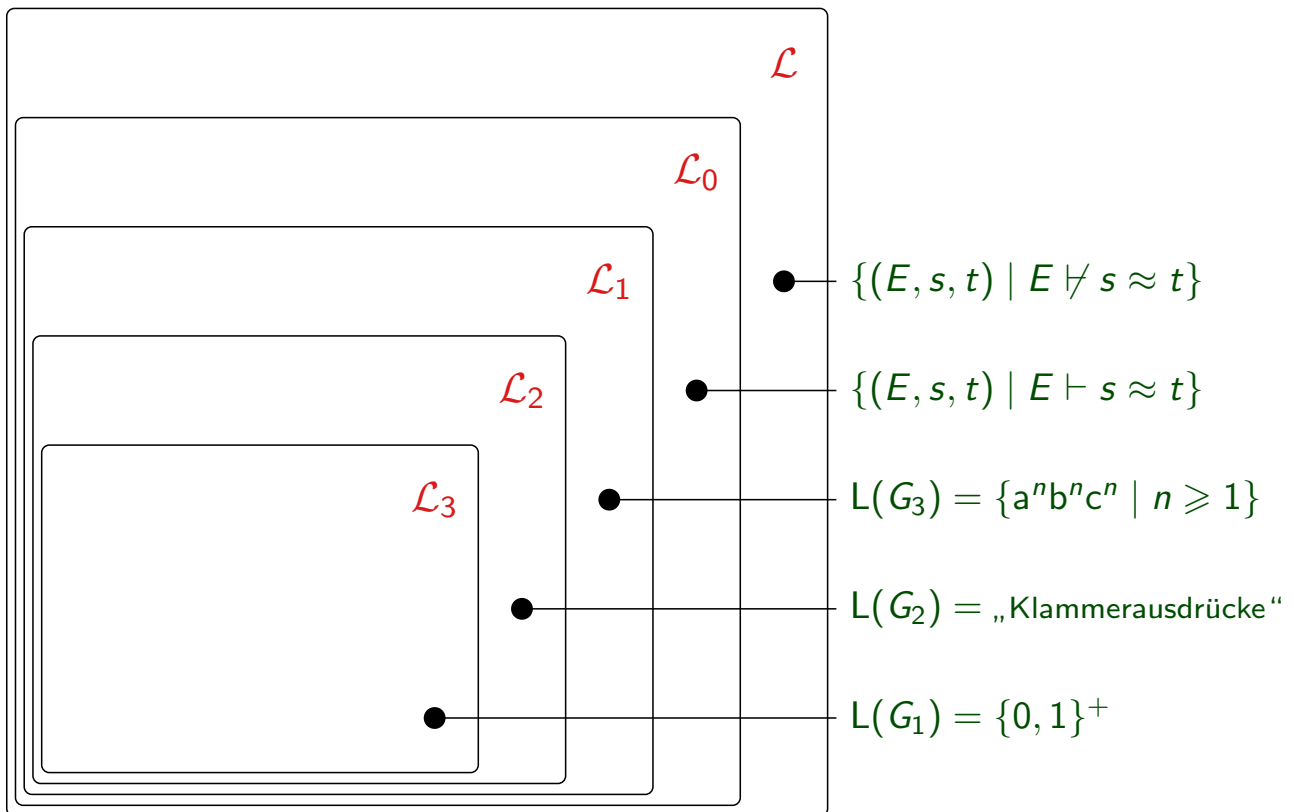
- 1 V eine endliche Menge von **Variablen** (oder **Nichtterminale**)
- 2 Σ ein Alphabet, die **Terminale**, $V \cap \Sigma = \emptyset$
- 3 R eine endliche Menge von **Regeln**
- 4 $S \in V$ das **Startsymbol** von G

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- **regulär** (vom **Typ 3**)
wenn \exists rechtslineare Grammatik G mit $L = L(G)$
- **kontextfrei** (vom **Typ 2**)
wenn \exists kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$
- **kontextsensitiv** (vom **Typ 1**)
wenn \exists kontextsensitive Grammatik G mit $L = L(G)$
- **rekursiv aufzählbar** (vom **Typ 0**) wenn \exists Grammatik G mit $L = L(G)$

Chomsky-Hierarchie



Überblick

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, **Reguläre Sprachen**, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare, Verschlüsselung und Sicherheit

Deterministische endliche Automaten

Reguläre Sprachen können durch

- ... rechtslineare Grammatiken erzeugt werden
- ... deterministische endliche Automaten akzeptiert werden

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass

- 1 Q eine endliche Menge von Zuständen
- 2 Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
- 3 $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die Übergangsfunktion
- 4 $s \in Q$ der Startzustand
- 5 $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

Zu beachten: δ muss für alle möglichen Argumente definiert sein

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$...
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$...
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$...	
\vdots	\vdots		

Zustandsgraph

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Der Zustandsgraph von A hat

- 1 Ecken Q ,
- 2 eine Kante von p nach q (beschriftet mit a), wenn $\delta(p, a) = q$.

Konvention

- Den Startzustand markiert man mit einem Pfeil; die akzeptierenden Zustände werden mit einem doppelten Kreis gekennzeichnet

Beispiel (DEA)

DEA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$
 mit δ gegeben durch Zustandstabelle

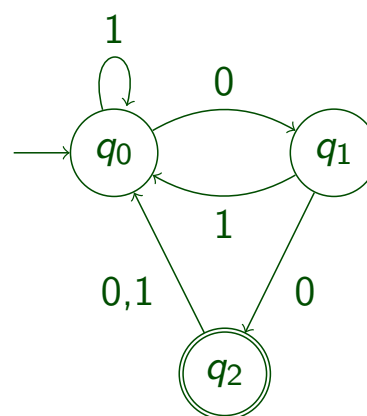
	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_0	q_0

Beispiel (DEA)

DEA A

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2^*	q_0	q_0

Zustandsgraph von A



- $\epsilon \notin L(A)$
- $0 \notin L(A)$
- $00 \in L(A)$
- $000 \notin L(A)$
- $101100 \in L(A)$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion. Wir definieren die **erweiterte Übergangsfunktion** $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ induktiv:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \epsilon) &:= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &:= \delta(\hat{\delta}(q, x), a) \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{aligned}$$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ ein DEA. Die **von A akzeptierte Sprache** ist

$$L(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(s, x) \in F\}$$

Satz

Für jeden DEA A ist $L(A)$ regulär. Umgekehrt existiert zu jeder regulären Sprache L ein DEA A, sodass $L = L(A)$.

Beispiel

Definiere DEA **A**, der alle aus Nullen und Einsen bestehenden Wörter akzeptiert, welche die Folge **01** enthalten

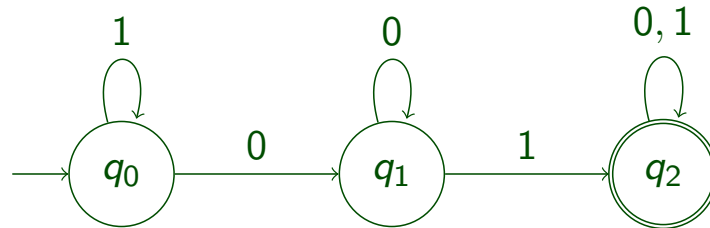
$$L = \{x01y \mid x, y \text{ sind beliebige Wörter aus Nullen und Einsen}\}$$

Wir machen die folgende Hilfsüberlegung:

- q_0** **A** hat Sequenz 01 noch nicht gefunden
A wechselt in Zustand **q_1** , sobald 0 gelesen wird
 Sonst verharrt **A** in Zustand **q_0**
- q_1** **A** hat Sequenz 0 gelesen
A wechselt in Zustand **q_2** , sobald 1 gelesen wird
 Sonst verharrt **A** in Zustand **q_1**
- q_2** **A** hat Sequenz 01 gelesen
A akzeptiert jede weitere Eingabe

Beispiel (Fortsetzung)

Der Automat kann durch den Zustandsgraphen angegeben werden:



Es ist auch eine Darstellung durch die Zustandstabelle denkbar, wobei der Startzustand durch einen Pfeil gekennzeichnet ist und die akzeptierenden Zustände durch *.

	0	1
→q ₀	q ₁	q ₀
q ₁	q ₁	q ₂
q ₂ *	q ₂	q ₂

Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

Satz

Seien L, M reguläre Sprachen (über dem Alphabet Σ), dann gilt

- 1 Die Vereinigung $L \cup M$ ist regulär
- 2 Das Komplement $\sim L$ ist regulär
- 3 Der Schnitt $L \cap M$ ist regulär
- 4 Die Mengendifferenz $L \setminus M$ ist regulär
- 5 L^* ist regulär

Anwendungen von regulären Sprachen

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
 - 1 lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
 - 2 Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum Durchsuchen umfangreicher Texte
- Software zur Verifizierung aller Arten von Systemen, die eine endliche Anzahl verschiedener Zustände besitzen
- Softwarebausteine eines Computerspiels:
 - 1 Kontrolle von Spielfiguren kann mit Hilfe eines endlichen Automaten implementiert werden
 - 2 erlaubt eine bessere Modularisierung des Codes

Endliche Automaten: Fallstudie

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

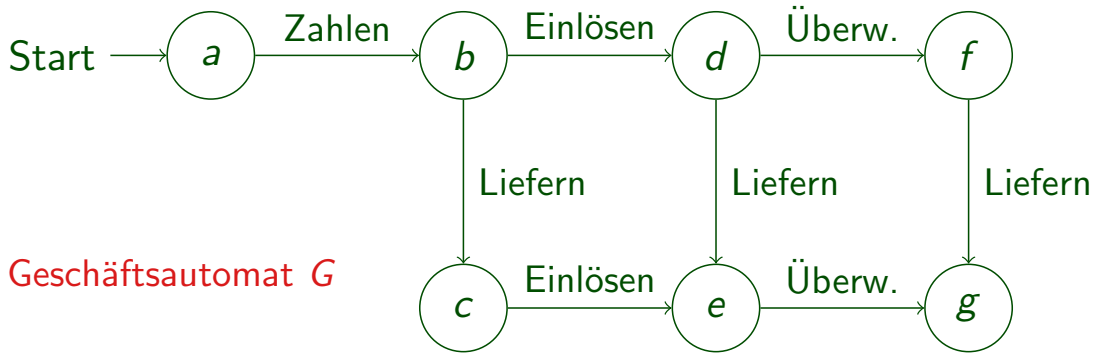
- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen
- Das Geschäft kann dem Kunden Waren zusenden
- Das Geschäft kann Geld einlösen
- Die Bank kann Geld überweisen

Wir treffen die folgenden Grundannahmen:

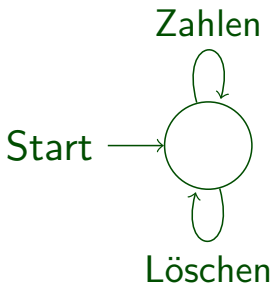
- Der Kunde ist unverantwortlich
- Das Geschäft ist verantwortlich, aber gutgläubig
- Die Bank ist strikt

wir betrachten die Handlungen der Akteure als „extern“; die Sequenz der Handlungen ist wichtig, nicht wer sie initiiert

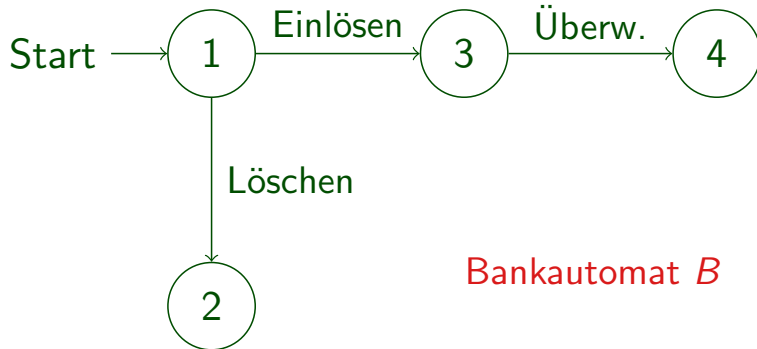
Beispiel (Fortsetzung)



Geschäftsautomat *G*

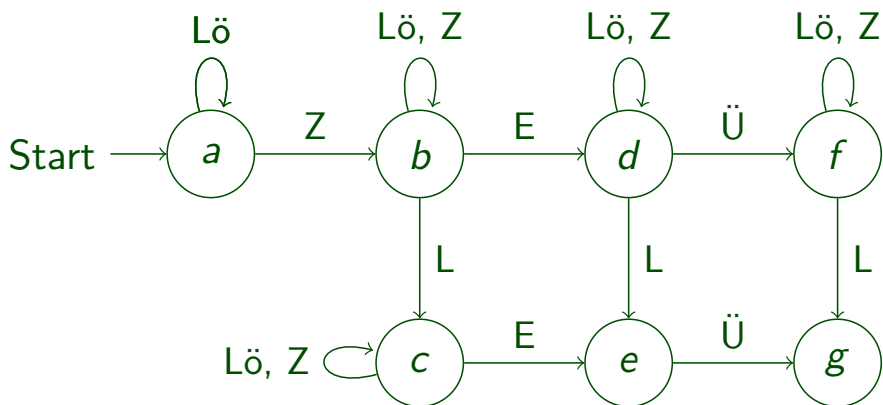


Kundenautomat *K*

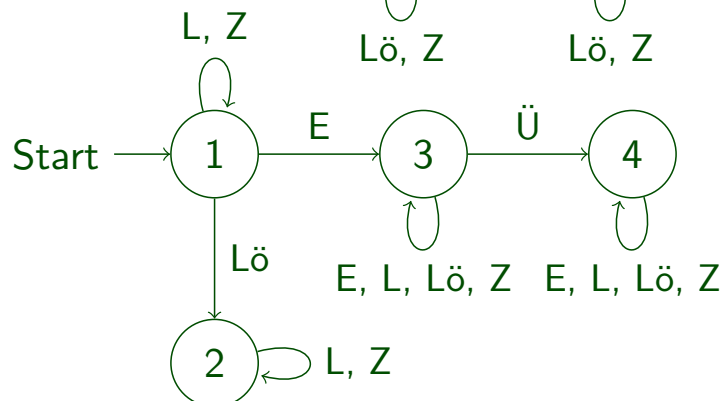
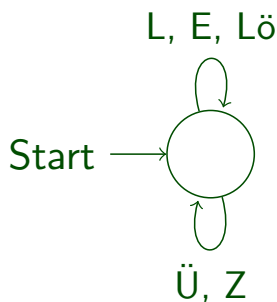


Bankautomat *B*

Beispiel (Fortsetzung)



Zahlen... Z
 Einlösen... E
 Löschen... Lö
 Liefern... L
 Überw. ... Ü



Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den **Produktautomaten** $B \times G$ aus B und G :

- Die **Zustände** dieses Automaten sind:

(i, x) wobei $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$

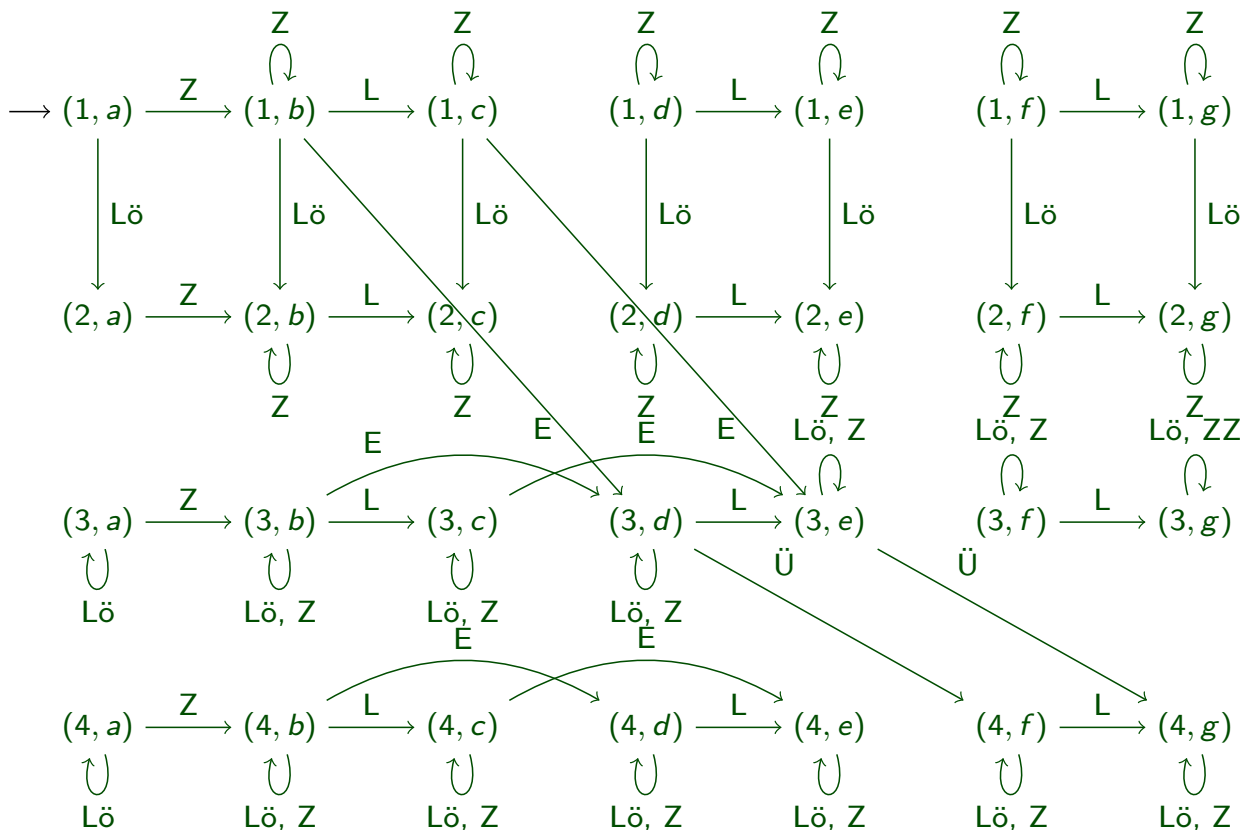
- Die **Übergänge** werden durch **paralleles** Ausführen von B und G definiert:

wenn $i \xrightarrow{\text{Aktion}} i'$ und $x \xrightarrow{\text{Aktion}} x'$ dann $(i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$

Betrachte B und G :

- in B gilt, dass aus Zustand 1 durch die Aktion „Einlösen“ Zustand 3 wird, konzise: $1 \xrightarrow{\text{Einlösen}} 3$
- in G gilt, dass aus Zustand b mit Aktion „Einlösen“ d wird, konzise: $b \xrightarrow{\text{Einlösen}} d$
- also gilt in $B \times G$, dass aus Zustand $(1, b)$ mit Aktion „Einlösen“ Zustand $(3, d)$ wird, konzise: $(1, b) \xrightarrow{\text{Einlösen}} (3, d)$

Beispiel (Fortsetzung)



Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird