Einführung in die Theoretische Informatik

Woche 9

Harald Zankl

Institut für Informatik @ UIBK
Wintersemester 2014/2015

Zusammenfassung der letzten LV

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbolen
3. $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion
4. $s \in Q$ der Startzustand
5. $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

Zu beachten: δ muss für alle möglichen Argumente definiert sein

Satz

Für jeden DEA A ist $\mathrm{L}(A)$ regulär. Umgekehrt existiert zu jeder regulären Sprache L ein DEA A, sodass $L = \mathrm{L}(A)$.

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare, Verschlüsselung und Sicherheit

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$.

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch die Wörter

$$0x0 \qquad 1x1$$

   Palindrome

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$.

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch die Wörter

   $$0x0 \qquad 1x1$$

   Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R:

$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1$$
$$P \to 0P0 \mid 1P1$$

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$.

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch die Wörter

$$0x0 \qquad 1x1$$

   Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R:

$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1$$
$$P \to 0P0 \mid 1P1$$

- Die Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ beschreibt die Sprache der Palindrome, d.h. $\mathrm{L}(G_1)$ ist genau die Menge der Palindrome über Σ

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$.

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch die Wörter

$$0x0 \qquad 1x1$$

   Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R:

$$P \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1$$
$$P \rightarrow 0P0 \mid 1P1$$

- Die Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ beschreibt die Sprache der Palindrome, d.h. $\mathrm{L}(G_1)$ ist genau die Menge der Palindrome über Σ
- G_1 ist kontextfrei

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in \mathrm{L}(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \overset{*}{\Rightarrow} x$

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in \mathrm{L}(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in \mathrm{L}(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \overset{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in L(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in L(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \stackrel{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in \mathrm{L}(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \overset{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \overset{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$
   Somit gilt $P \overset{*}{\Rightarrow} y$. Aus der Induktionshypothese folgt, dass y ein Palindrom ist. In beiden Fällen ist dann aber auch x ein Palindrom.

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in \mathrm{L}(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \overset{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \overset{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$
   Somit gilt $P \overset{*}{\Rightarrow} y$. Aus der Induktionshypothese folgt, dass y ein Palindrom ist. In beiden Fällen ist dann aber auch x ein Palindrom ∎

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich?

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich? Im Beweis schließen wir nämlich, dass aus

$$P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$$

auch $P \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ folgt

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich? Im Beweis schließen wir nämlich, dass aus

$$P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$$

auch $P \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ folgt

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, C, B, H\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, R, S)$ mit folgender Regel in R:

$$CB \quad \rightarrow \quad HB$$

Dann gilt etwa $BCB \stackrel{*}{\Rightarrow} BHB$, aber sicher nicht $C \stackrel{*}{\Rightarrow} H$

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich? Im Beweis schließen wir nämlich, dass aus

$$P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$$

auch $P \overset{*}{\Rightarrow} y$ folgt

Beispiel

Betrachte die Grammatik $G = (\{S, C, B, H\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, R, S)$ mit folgender Regel in R:

$$CB \rightarrow HB$$

Dann gilt etwa $BCB \overset{*}{\Rightarrow} BHB$, aber sicher nicht $C \overset{*}{\Rightarrow} H$

Antwort

Der Beweis stimmt, aber nur für kontextfreie Grammatiken

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich? Im Beweis schließen wir nämlich, dass aus

$$P \Rightarrow 0P0 \overset{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$$

auch $P \overset{*}{\Rightarrow} y$ folgt

Beispiel

Betrachte die (kontextsensitive) Grammatik
$G = (\{S, C, B, H\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, R, S\}$ mit folgender Regel in R:

$$CB \quad \to \quad HB$$

Dann gilt etwa $BCB \overset{*}{\Rightarrow} BHB$, aber sicher nicht $C \overset{*}{\Rightarrow} H$

Antwort

Der Beweis stimmt, aber nur für kontextfreie Grammatiken

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik.*
Wenn $X_1 X_2 \ldots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ *mit* $X_i \in V \cup \Sigma$ *und* $x \in \Sigma^*$*, dann kann man* x *in die Stücke* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *zerlegen, sodass* $X_i \stackrel{*}{\Rightarrow} x_i$ *für alle* $1 \leqslant i \leqslant n$*.*

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik.*
Wenn $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ *mit* $X_i \in V \cup \Sigma$ *und* $x \in \Sigma^*$*, dann kann man* x *in die Stücke* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *zerlegen, sodass* $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ *für alle* $1 \leqslant i \leqslant n$*.*

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1 X_2 \dots X_i \dots X_j \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1X_2 \dots X_i \dots X_j \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1 X_2 \dots X_i \dots X_j \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1 X_2 \dots X_i \dots X_j \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ aus $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, indem

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1 X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1 X_2 \ldots X_i \ldots X_j \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ aus $X_1 X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, indem
   - Ableitungen ausgehend von $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ignoriert

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1X_2\ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1X_2\ldots X_i\ldots X_j\ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ aus $X_1X_2\ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, indem
   - Ableitungen ausgehend von $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ignoriert
   - Ableitungen ausgehend von X_i simuliert werden

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1X_2 \ldots X_i \ldots X_j \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ aus $X_1X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, indem
   - Ableitungen ausgehend von $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ignoriert
   - Ableitungen ausgehend von X_i simuliert werden

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Wenn $X_1X_2 \ldots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zerlegen, sodass $X_i \stackrel{*}{\Rightarrow} x_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1X_2 \ldots X_i \ldots X_j \ldots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \stackrel{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \stackrel{*}{\Rightarrow} x_i$ aus $X_1X_2 \ldots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, indem
   - Ableitungen ausgehend von $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ignoriert
   - Ableitungen ausgehend von X_i simuliert werden

∎

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine Grammatik,* $A \in V$ *und* $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$*. Dann gilt für alle* $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ *auch* $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$*.*

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine Grammatik,* $A \in V$ *und* $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$*. Dann gilt für alle* $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ *auch* $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$*.*

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{0, \ldots, k-1\}$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Nach Definition gilt auch $uw_iv \Rightarrow uw_{i+1}v$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Nach Definition gilt auch $uw_iv \Rightarrow uw_{i+1}v$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Nach Definition gilt auch $uw_iv \Rightarrow uw_{i+1}v$

Somit folgt

$$uAv = uw_0v \Rightarrow uw_1v \Rightarrow \cdots \Rightarrow uw_{k-1}v \Rightarrow uw_kv = uxv$$

∎

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Linksableitung ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird $\underset{\ell}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}}$

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Linksableitung ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird $\underset{\ell}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}}$
- In einer Rechtsableitung wird immer die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt $\underset{r}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{r}{\Rightarrow}}$

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Linksableitung ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird $\underset{\ell}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}}$
- In einer Rechtsableitung wird immer die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt $\underset{r}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{r}{\Rightarrow}}$

Beispiel

Sei $G_2 = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$ eine (kontextfreie) Grammatik mit Regeln R:

$$S \to \epsilon \mid (S) \mid SS$$

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Linksableitung ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird $\underset{\ell}{\Rightarrow}$, $\overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}}$
- In einer Rechtsableitung wird immer die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt $\underset{r}{\Rightarrow}$, $\overset{*}{\underset{r}{\Rightarrow}}$

Beispiel

Sei $G_2 = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$ eine (kontextfreie) Grammatik mit Regeln R:

$$S \to \epsilon \mid (S) \mid SS$$

Dann gilt $S \underset{r}{\Rightarrow} SS \underset{r}{\Rightarrow} S(S) \underset{r}{\Rightarrow} S() \underset{r}{\Rightarrow} (S)() \underset{r}{\Rightarrow} ()()$

Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine Linksableitung ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird $\underset{\ell}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}}$
- In einer Rechtsableitung wird immer die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt $\underset{r}{\Rightarrow}, \overset{*}{\underset{r}{\Rightarrow}}$

Beispiel

Sei $G_2 = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$ eine (kontextfreie) Grammatik mit Regeln R:

$$S \to \epsilon \mid (S) \mid SS$$

Dann gilt $S \underset{r}{\Rightarrow} SS \underset{r}{\Rightarrow} S(S) \underset{r}{\Rightarrow} S() \underset{r}{\Rightarrow} (S)() \underset{r}{\Rightarrow} ()()$

Definition (Eindeutigkeit einer Grammatik)

Eine kontextfreie Grammatik G heißt eindeutig, wenn jedes Wort $x \in \mathrm{L}(G)$ genau eine Linksableitung besitzt, ansonsten mehrdeutig

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathsf{L}(A)$.

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \rightarrow X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathrm{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathrm{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathrm{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathrm{L}(A)$.

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \ldots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \ldots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \ldots X_n \in \mathsf{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathsf{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathsf{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathsf{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \to \mathrm{b}$	

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \ldots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \ldots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \ldots X_n \in \mathsf{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathsf{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathsf{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathsf{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \to \mathrm{b}$	
3	b1	T	$T \to T1$	2

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \ldots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \ldots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \ldots X_n \in \mathsf{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathsf{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathsf{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathsf{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \to \mathrm{b}$	
3	b1	T	$T \to T1$	2
4	b10	T	$T \to T0$	3

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \rightarrow X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathrm{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathrm{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathrm{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathrm{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \rightarrow T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \rightarrow \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathrm{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \rightarrow \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \rightarrow \mathrm{b}$	
3	b1	T	$T \rightarrow T1$	2
4	b10	T	$T \rightarrow T0$	3
5	a	E	$E \rightarrow T$	1
6	b10	E	$E \rightarrow T$	4

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathrm{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathrm{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathrm{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathrm{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathrm{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \to \mathrm{b}$	
3	b1	T	$T \to T1$	2
4	b10	T	$T \to T0$	3
5	a	E	$E \to T$	1
6	b10	E	$E \to T$	4
7	$\mathrm{a} + \mathrm{b}10$	E	$E \to E + E$	5, 6

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathsf{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathsf{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathsf{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathsf{a}, \mathsf{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathsf{a} \mid \mathsf{b} \mid T\mathsf{a} \mid T\mathsf{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathsf{a} + \mathsf{b}10) \in \mathsf{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathsf{a}$	
2	b	T	$T \to \mathsf{b}$	
3	b1	T	$T \to T1$	2
4	b10	T	$T \to T0$	3
5	a	E	$E \to T$	1
6	b10	E	$E \to T$	4
7	a + b10	E	$E \to E + E$	5, 6
8	(a + b10)	E	$E \to (E)$	7

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \to X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $\mathsf{L}(A)$ induktiv:

1. Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in \mathsf{L}(A)$.
2. Wenn $x_i \in \mathsf{L}(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \cdots x_n \in \mathsf{L}(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), \mathrm{a}, \mathrm{b}, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \to T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \qquad T \to \mathrm{a} \mid \mathrm{b} \mid T\mathrm{a} \mid T\mathrm{b} \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(\mathrm{a} + \mathrm{b}10) \in \mathsf{L}(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \to \mathrm{a}$	
2	b	T	$T \to \mathrm{b}$	
3	b1	T	$T \to T1$	2
4	b10	T	$T \to T0$	3
5	a	E	$E \to T$	1
6	b10	E	$E \to T$	4
7	$\mathrm{a} + \mathrm{b}10$	E	$E \to E + E$	5, 6
8	$(\mathrm{a} + \mathrm{b}10)$	E	$E \to (E)$	7

Bemerkung

- Wir nennen L(A) die Sprache von A.
- Die rekursive Inferenz entspricht dem bottom-up parsing eines Compilers: zuerst wird der Rumpf einer Regel gelesen, dann wird das Ergebnis der Variable im Kopf übergeben
- Der Parsergenerator `yacc` generiert einen bottom-up parser

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Ein Syntaxbaum für G ist ein Baum B sodass:

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Ein Syntaxbaum für G ist ein Baum B sodass:

1. Jedes Blatt in B ist entweder:
   - ein Terminal aus Σ
   - ein Nichtterminal aus V, oder
   - ϵ

   Im letzten Fall ist das Blatt das einzige Kind seines Vorgängers

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Ein Syntaxbaum für G ist ein Baum B sodass:

1. Jedes Blatt in B ist entweder:
   - ein Terminal aus Σ
   - ein Nichtterminal aus V, oder
   - ϵ

   Im letzten Fall ist das Blatt das einzige Kind seines Vorgängers
2. Jeder innere Knoten von B ist eine Variable $A \in V$ mit Kindern $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i \in V \cup \Sigma$), wobei:

$$A \to X_1 \cdots X_n \in R$$

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.
Ein Syntaxbaum für G ist ein Baum B sodass:

1. Jedes Blatt in B ist entweder:
   - ein Terminal aus Σ
   - ein Nichtterminal aus V, oder
   - ϵ

   Im letzten Fall ist das Blatt das einzige Kind seines Vorgängers
2. Jeder innere Knoten von B ist eine Variable $A \in V$ mit Kindern $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i \in V \cup \Sigma$), wobei:

$$A \to X_1 \cdots X_n \in R$$

Das Ergebnis eines Syntaxbaums B für G ist das Wort über $(V \cup \Sigma)^*$, das wir erhalten, wenn wir die Blätter in B von links nach rechts lesen

Beispiel

Wir betrachten die (kontextfreie) Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ mit:

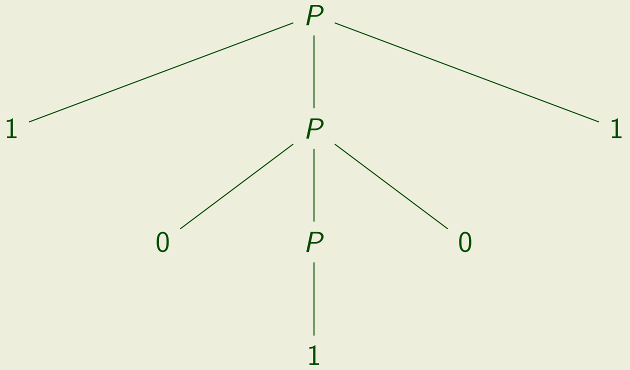
$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Beispiel

Wir betrachten die (kontextfreie) Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ mit:

$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Dann ist der folgende Baum ein Syntaxbaum für G_1:

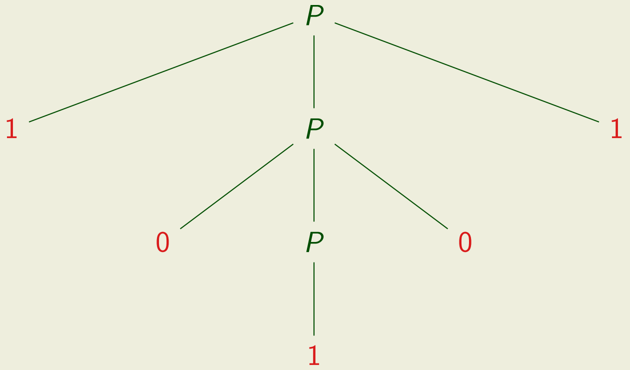


Beispiel

Wir betrachten die (kontextfreie) Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ mit:

$$P \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Dann ist der folgende Baum ein Syntaxbaum für G_1:



Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik,* $A \in V$ *und* $x \in \Sigma^*$*.*
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $x \in \mathsf{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren*
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} x$
3. $A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
4. $A \underset{r}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
5. *Es existiert ein Syntaxbaum für* G *mit Wurzel* A *und Ergebnis* x

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $x \in \mathrm{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren*
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} x$
3. $A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
4. $A \underset{r}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
5. *Es existiert ein Syntaxbaum für G mit Wurzel A und Ergebnis x*

Beweisidee:

$x \in \mathrm{L}(A)$

$\exists$ Syntaxbaum

$A \overset{*}{\Rightarrow} x$

$A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $x \in \mathrm{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren*
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} x$
3. $A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
4. $A \underset{r}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
5. *Es existiert ein Syntaxbaum für G mit Wurzel A und Ergebnis x*

Beweisidee:

$x \in \mathrm{L}(A)$ $\qquad$ $\exists$ Syntaxbaum

$A \overset{*}{\Rightarrow} x \longleftarrow A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $x \in \mathrm{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren*
2. $A \overset{*}{\Rightarrow} x$
3. $A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
4. $A \underset{r}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$
5. *Es existiert ein Syntaxbaum für G mit Wurzel A und Ergebnis x*

Beweisidee:

$$\begin{tikzcd}
x \in \mathrm{L}(A) \arrow[r] & \exists \text{ Syntaxbaum} \arrow[d] \\
A \overset{*}{\Rightarrow} x \arrow[u] & A \underset{\ell}{\overset{*}{\Rightarrow}} x \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Satz

Wenn $x \in \mathsf{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel* A *und Ergebnis* x.

Satz

Wenn $x \in \mathsf{L}(A)$ *nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel* A *und Ergebnis* x*.*

Beweis.

Mit Induktion nach der Anzahl der Rekursionen im Inferenzverfahren

Satz

Wenn $x \in \mathsf{L}(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x.

Beweis.

Mit Induktion nach der Anzahl der Rekursionen im Inferenzverfahren

1. Basis $x \in \mathsf{L}(A)$ benutzt genau die Regel $A \to x \in R$
   Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A:

$$A$$

$$x$$

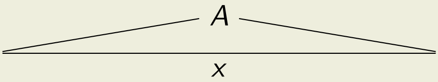
Satz

Wenn $x \in \mathrm{L}(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x.

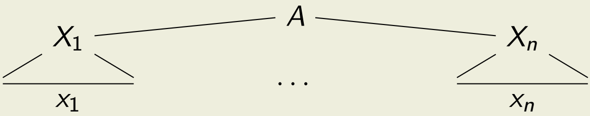
Beweis.

Mit Induktion nach der Anzahl der Rekursionen im Inferenzverfahren

1. Basis $x \in \mathrm{L}(A)$ benutzt genau die Regel $A \to x \in R$
   Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A:



2. Schritt $x \in \mathrm{L}(A)$ benutzt $A \to X_1 \cdots X_n$ $(X_i \in V \cup \Sigma)$
   Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A:



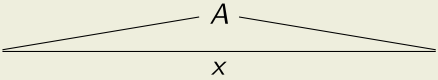
Satz

Wenn $x \in \mathrm{L}(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x.

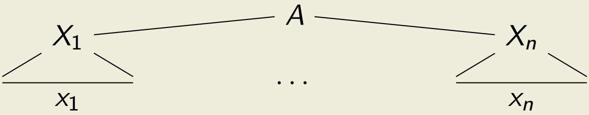
Beweis.

Mit Induktion nach der Anzahl der Rekursionen im Inferenzverfahren

1. Basis $x \in \mathrm{L}(A)$ benutzt genau die Regel $A \to x \in R$
   Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A:



2. Schritt $x \in \mathrm{L}(A)$ benutzt $A \to X_1 \cdots X_n$ $(X_i \in V \cup \Sigma)$
   Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A:



Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x, dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A.

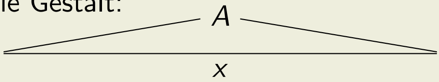
Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x, dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A.

Beweis.

Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

1. Basis Habe B die Gestalt:



   dann existiert $A \to x \in R$, also $A \underset{\ell}{\Rightarrow} x$

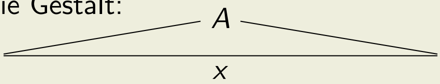
Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x, dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A.

Beweis.

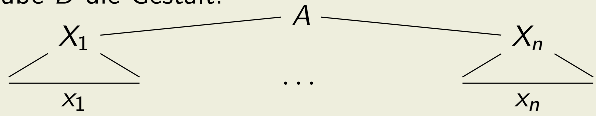
Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

1. Basis Habe B die Gestalt:



   dann existiert $A \to x \in R$, also $A \underset{\ell}{\Rightarrow} x$

2. Schritt Habe B die Gestalt:



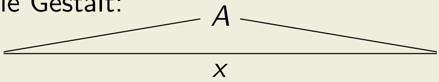
Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x, dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A.

Beweis.

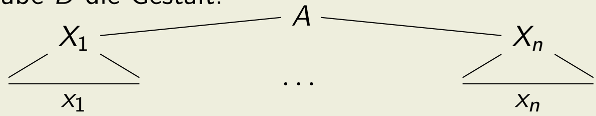
Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

1. Basis Habe B die Gestalt:



   dann existiert $A \to x \in R$, also $A \underset{\ell}{\Rightarrow} x$

2. Schritt Habe B die Gestalt:



   dann existiert $A \to X_1 \cdots X_n \in R$, also:

$$A \underset{\ell}{\Rightarrow} X_1 X_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 X_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 x_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 x_2 \cdots x_n$$

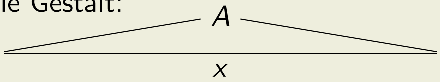
Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x, dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A.

Beweis.

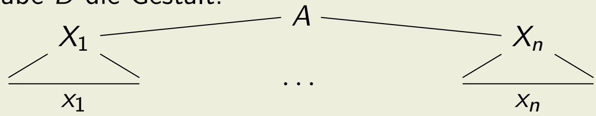
Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

1. Basis Habe B die Gestalt:



dann existiert $A \rightarrow x \in R$, also $A \underset{\ell}{\Rightarrow} x$

2. Schritt Habe B die Gestalt:



dann existiert $A \rightarrow X_1 \cdots X_n \in R$, also:

$$A \underset{\ell}{\Rightarrow} X_1 X_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 X_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 x_2 \cdots X_n \overset{*}{\underset{\ell}{\Rightarrow}} x_1 x_2 \cdots x_n$$

∎

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik,* $A \in V$ *und* $x \in \Sigma^*$*.*
Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$*, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass* $x \in \mathsf{L}(A)$*.*

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik,* $A \in V$ *und* $x \in \Sigma^*$*.*
Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$*, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass* $x \in \mathrm{L}(A)$*.*

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \overset{*}{\Rightarrow} x$:

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$.
Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \overset{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ *eine kontextfreie Grammatik,* $A \in V$ *und* $x \in \Sigma^*$*.*
Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$*, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass* $x \in \mathrm{L}(A)$*.*

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \overset{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Wenn $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$
   Zunächst können wir die Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ wie folgt schreiben:

$$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x$$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Wenn $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$
   Zunächst können wir die Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ wie folgt schreiben:

$$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Wenn $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$
   Zunächst können wir die Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ wie folgt schreiben:

   $$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

   Wir verwenden, dass wir die Ableitungen der Sätze x_i aufbrechen können,

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Wenn $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$
   Zunächst können wir die Ableitung $A \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ wie folgt schreiben:

   $$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \stackrel{*}{\Rightarrow} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

   Wir verwenden, dass wir die Ableitungen der Sätze x_i aufbrechen können, also gilt:

   - Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$
   - Wenn $X_i \in V$, dann gilt $X_i \stackrel{*}{\Rightarrow} x_i$ und somit $x_i \in \mathrm{L}(X_i)$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in \mathrm{L}(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \overset{*}{\Rightarrow} x$:

1. Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in \mathrm{L}(A)$
2. Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$

   Zunächst können wir die Ableitung $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ wie folgt schreiben:

   $$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

   Wir verwenden, dass wir die Ableitungen der Sätze x_i aufbrechen können, also gilt:

   - Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$
   - Wenn $X_i \in V$, dann gilt $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ und somit $x_i \in \mathrm{L}(X_i)$ ∎