

Einführung in die Theoretische Informatik

Woche 9

Harald Zankl

Institut für Informatik @ UIBK
Wintersemester 2014/2015



Zusammenfassung

Zusammenfassung der letzten LV

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein **DEA** ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**
- 3 $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die **Übergangsfunktion**
- 4 $s \in Q$ der **Startzustand**
- 5 $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von **akzeptierenden Zuständen**

Zu beachten: δ muss für alle möglichen Argumente definiert sein

Satz

Für jeden DEA A ist $L(A)$ regulär. Umgekehrt existiert zu jeder regulären Sprache L ein DEA A , sodass $L = L(A)$.

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, **Kontextfreie Sprachen**

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare, Verschlüsselung und Sicherheit

Kontextfreie Sprachen

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$.

- 1 $\epsilon, 0, 1$ sind Palindrome
- 2 Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch die Wörter

$$0x0 \quad 1x1$$

Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R :

$$P \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1$$

$$P \rightarrow 0P0 \mid 1P1$$

- Die Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ beschreibt die Sprache der Palindrome, d.h. $L(G_1)$ ist genau die Menge der Palindrome über Σ
- G_1 ist kontextfrei

Beweis.

Es ist zu zeigen, dass $x \in L(G_1)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: Wenn $x \in L(G_1)$, dann ist x ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \xRightarrow{*} x$

1 Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:

- $x = \epsilon$
- $x = 0$
- $x = 1$

In allen Fällen: x ist Palindrom

2 Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:

- $P \Rightarrow 0P0 \xRightarrow{*} 0y0 = x$
- $P \Rightarrow 1P1 \xRightarrow{*} 1y1 = x$

wobei $y \in \Sigma^*$

Somit gilt $P \xRightarrow{*} y$. Aus der Induktionshypothese folgt, dass y ein Palindrom ist. In beiden Fällen ist dann aber auch x ein Palindrom. ■

Frage

Stimmt dieser Beweis wirklich? Im Beweis schließen wir nämlich, dass aus

$$P \Rightarrow 0P0 \xRightarrow{*} 0y0 = x$$

auch $P \xRightarrow{*} y$ folgt

Beispiel

Betrachte die (kontextsensitive) Grammatik

$G = (\{S, C, B, H\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgender Regel in R :

$$CB \rightarrow HB$$

Dann gilt etwa $BCB \xRightarrow{*} BHB$, aber sicher nicht $C \xRightarrow{*} H$

Antwort

Der Beweis stimmt, aber nur für **kontextfreie** Grammatiken

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Wenn $X_1 X_2 \dots X_n \xRightarrow{*} x$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ und $x \in \Sigma^*$, dann kann man x in die Stücke x_1, x_2, \dots, x_n zerlegen, sodass $X_i \xRightarrow{*} x_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Hilfsüberlegung

- Sei $i < j$ und betrachte: $X_1 X_2 \dots X_i \dots X_j \dots X_n \xRightarrow{*} x$
- Dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

- 1 Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \xRightarrow{*} x_i$
- 2 Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \xRightarrow{*} x_i$ aus $X_1 X_2 \dots X_n \xRightarrow{*} x$, indem
 - Ableitungen ausgehend von $X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ ignoriert
 - Ableitungen ausgehend von X_i simuliert werden



Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik, $A \in V$ und $A \xRightarrow[G]{*} x$. Dann gilt für alle $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$ auch $uAv \xRightarrow[G]{*} uxv$.

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_0, \dots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow w_k = x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{0, \dots, k-1\}$
- Nach Definition gilt auch $u w_i v \Rightarrow u w_{i+1} v$

Somit folgt

$$uAv = u w_0 v \Rightarrow u w_1 v \Rightarrow \dots \Rightarrow u w_{k-1} v \Rightarrow u w_k v = uxv$$



Definition

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

- Eine **Linksableitung** ist eine Ableitung sodass immer die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird
- In einer **Rechtsableitung** wird immer die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt

$$\Rightarrow_\ell, \Rightarrow_\ell^*$$

$$\Rightarrow_r, \Rightarrow_r^*$$

Beispiel

Sei $G_2 = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$ eine (kontextfreie) Grammatik mit Regeln R :

$$S \rightarrow \epsilon \mid (S) \mid SS$$

Dann gilt $S \Rightarrow_r SS \Rightarrow_r S(S) \Rightarrow_r S() \Rightarrow_r (S)() \Rightarrow_r ()()$

Definition (Eindeutigkeit einer Grammatik)

Eine kontextfreie Grammatik G heißt **eindeutig**, wenn jedes Wort $x \in L(G)$ genau eine Linksableitung besitzt, ansonsten **mehrdeutig**

Definition (rekursive Inferenz)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Für eine Regel $A \rightarrow X_1 \dots X_n$ mit $X_i \in V \cup \Sigma$ definieren wir $L(A)$ induktiv:

- 1 Wenn $X_1 \dots X_n \in \Sigma^*$, dann $X_1 \dots X_n \in L(A)$.
- 2 Wenn $x_i \in L(X_i)$ oder $x_i = X_i \in \Sigma$, dann $x_1 x_2 \dots x_n \in L(A)$.

Beispiel

Sei $G_3 = (\{E, T\}, \{+, \cdot, (,), a, b, 0, 1\}, R, E)$ eine Grammatik mit Regeln

$$E \rightarrow T \mid E + E \mid E \cdot E \mid (E) \quad T \rightarrow a \mid b \mid Ta \mid Tb \mid T0 \mid T1$$

Wir zeigen $(a + b10) \in L(E)$:

Schritt	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	a	T	$T \rightarrow a$	
2	b	T	$T \rightarrow b$	
3	b1	T	$T \rightarrow T1$	2
4	b10	T	$T \rightarrow T0$	3
5	a	E	$E \rightarrow T$	1
6	b10	E	$E \rightarrow T$	4
7	a + b10	E	$E \rightarrow E + E$	5,6
8	(a + b10)	E	$E \rightarrow (E)$	7

Bemerkung

- Wir nennen $L(A)$ die Sprache von A .
- Die rekursive Inferenz entspricht dem **bottom-up parsing** eines Compilers: zuerst wird der Rumpf einer Regel gelesen, dann wird das Ergebnis der Variable im Kopf übergeben
- Der Parsergenerator yacc generiert einen bottom-up parser

Syntaxbäume

Definition (Syntaxbaum)

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

Ein **Syntaxbaum** für G ist ein Baum B sodass:

- 1 Jedes Blatt in B ist entweder:
 - ein Terminal aus Σ
 - ein Nichtterminal aus V , oder
 - ϵ

Im letzten Fall ist das Blatt das einzige Kind seines Vorgängers

- 2 Jeder innere Knoten von B ist eine Variable $A \in V$ mit Kindern X_1, \dots, X_n ($X_i \in V \cup \Sigma$), wobei:

$$A \rightarrow X_1 \cdots X_n \in R$$

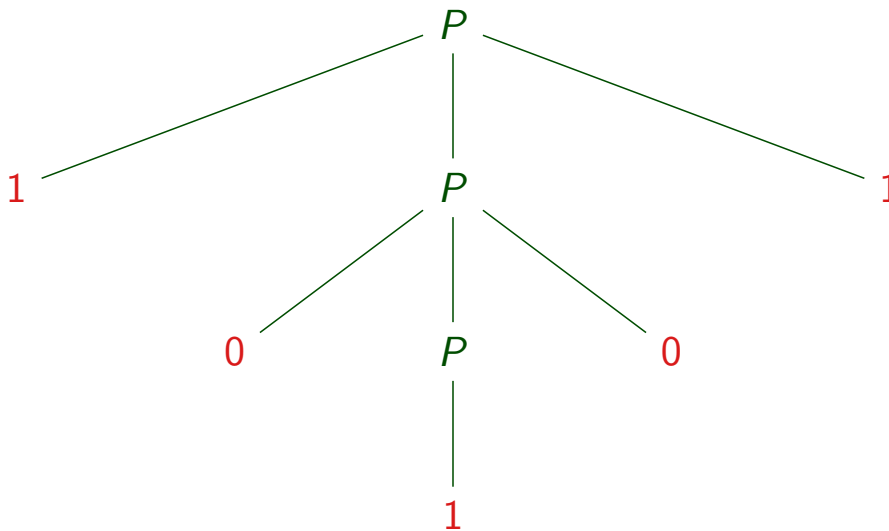
Das **Ergebnis** eines Syntaxbaums B für G ist das Wort über $(V \cup \Sigma)^*$, das wir erhalten, wenn wir die Blätter in B von links nach rechts lesen

Beispiel

Wir betrachten die (kontextfreie) Grammatik $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ mit:

$$P \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$$

Dann ist der folgende Baum ein Syntaxbaum für G_1 :

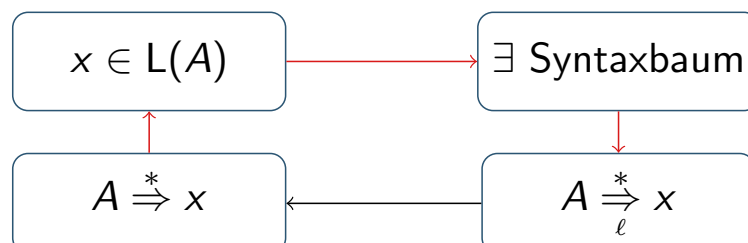


Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$. Die folgenden Aussagen sind *äquivalent*:

- 1 $x \in L(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren
- 2 $A \xRightarrow{*} x$
- 3 $A \xRightarrow[\ell]{*} x$
- 4 $A \xRightarrow[r]{*} x$
- 5 Es existiert ein Syntaxbaum für G mit Wurzel A und Ergebnis x

Beweisidee:



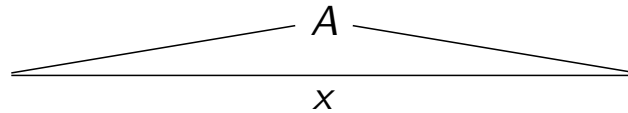
Satz

Wenn $x \in L(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren, dann gibt es einen Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x .

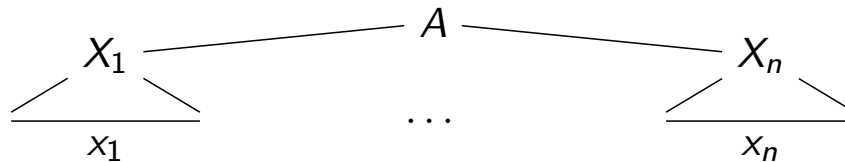
Beweis.

Mit Induktion nach der Anzahl der Rekursionen im Inferenzverfahren

- 1 **Basis** $x \in L(A)$ benutzt genau die Regel $A \rightarrow x \in R$
Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A :



- 2 **Schritt** $x \in L(A)$ benutzt $A \rightarrow X_1 \cdots X_n$ ($X_i \in V \cup \Sigma$)
Dann gibt es Syntaxbaum mit Wurzel A :



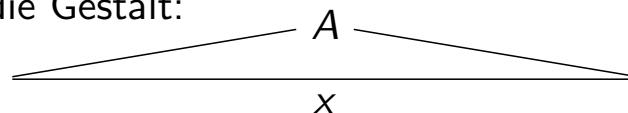
Satz

Sei B ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x , dann gibt es eine Linksableitung (eine Rechtsableitung) von x aus A .

Beweis.

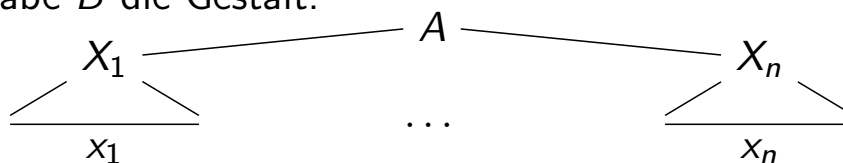
Mit Induktion nach der Höhe des Syntaxbaums

- 1 **Basis** Habe B die Gestalt:



dann existiert $A \rightarrow x \in R$, also $A \xRightarrow{\ell} x$

- 2 **Schritt** Habe B die Gestalt:



dann existiert $A \rightarrow X_1 \cdots X_n \in R$, also:

$$A \xRightarrow{\ell} X_1 X_2 \cdots X_n \xRightarrow{\ell}^* x_1 X_2 \cdots X_n \xRightarrow{\ell}^* x_1 x_2 \cdots X_n \xRightarrow{\ell}^* x_1 x_2 \cdots x_n$$

Satz

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $A \in V$ und $x \in \Sigma^*$.

Wenn $A \xRightarrow{*} x$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in L(A)$.

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \xRightarrow{*} x$:

1 **Basis** Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in L(A)$

2 **Schritt** Angenommen $\ell = \ell' + 1$

Zunächst können wir die Ableitung $A \xRightarrow{*} x$ wie folgt schreiben:

$$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \xRightarrow{*} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Wir verwenden, dass wir die Ableitungen der Sätze x_i aufbrechen können, also gilt:

- Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$
- Wenn $X_i \in V$, dann gilt $X_i \xRightarrow{*} x_i$ und somit $x_i \in L(X_i)$ ■