7) *Lösung.* Diese Formel ist eine Tautologie (also auch erfüllbar), da im folgenden Beweisbaum immer True herauskommt:

$$\begin{aligned}
&\neg t \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \to (\neg(s \wedge \neg s) \vee q \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r))))\\
&\equiv \neg t \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \to (\neg \mathsf{False} \vee q \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r))))\\
&\equiv \neg t \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \to (\mathsf{True} \vee q \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r))))\\
&\equiv \neg t \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \to (\mathsf{True} \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r))))\\
&\equiv \neg t \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r)))
\end{aligned}$$

$\{t \to \mathsf{True}\}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{False} \wedge q \wedge p \to (\dots)\\
&\equiv \mathsf{False} \to (\dots)\\
&\equiv \mathsf{True}
\end{aligned}$$

$\{t \to \mathsf{False}\}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{True} \wedge q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge \mathsf{False}) \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r)))\\
&\equiv q \wedge p \to ((\neg r \wedge \neg p) \vee \mathsf{False} \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r)))\\
&\equiv q \wedge p \to (\neg r \wedge \neg p \to (q \vee p \to r \wedge (\neg q \vee r)))
\end{aligned}$$

$\{p \to \mathsf{True}\}$

$$\begin{aligned}
&q \wedge \mathsf{True} \to (\neg r \wedge \mathsf{False} \to (q \vee \mathsf{True} \to r \wedge (\neg q \vee r)))\\
&\equiv q \to (\mathsf{False} \to (\mathsf{True} \to r \wedge (\neg q \vee r)))\\
&\equiv q \to \mathsf{True}\\
&\equiv \mathsf{True}
\end{aligned}$$

$\{p \to \mathsf{False}\}$

$$\begin{aligned}
&q \wedge \mathsf{False} \to (\dots)\\
&\equiv \mathsf{False} \to (\dots)\\
&\equiv \mathsf{True}
\end{aligned}$$

□

8) *Lösung.*

a)

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) + (\sim(a) + \sim(b)) &= (a + \sim(a) + \sim(b)) \cdot (b + \sim(a) + \sim(b))\\
&= (1 + \sim(b)) \cdot (1 + \sim(a))\\
&= 1 \cdot 1\\
&= 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (\sim(a) + \sim(b)) &= \sim(a) \cdot a \cdot b + \sim(b) \cdot a \cdot b\\
&= 0 \cdot b + 0 \cdot a\\
&= 0 + 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

9) *Lösung.* Rekursive Inferenz von $P :=$ `while i neq 0 do --i; --i done` in G:

	Wort	Variable	Regel	Rekursion
1	`i`	$CHAR$	$CHAR \to$ `i`	
2	`i`	ID	$ID \to CHAR$	1
3	`i`	$TERM$	$TERM \to ID$	2
4	`0`	$DIGIT$	$DIGIT \to$ `0`	
5	`0`	NAT	$NAT \to DIGIT$	4
6	`0`	$TERM$	$TERM \to NAT$	5
7	`i neq 0`	$TEST$	$TEST \to TERM$ `neq` $TERM$	$3, 6$
8	`--i`	$STMT$	$STMT \to$ `--`ID	2
9	`--i; --i`	$STMT$	$STMT \to STMT$`;` $STMT$	$8, 8$
10	P	$STMT$	$STMT \to$ `while` $TEST$ `do` $STMT$ `done`	$7, 9$

□

10) *Lösung.*

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1 - 1 = 9\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 = 9\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1 = 10\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 = 9\}}\,[\mathrm{a}]^{1}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1 - 1 = 8\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 = 8\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1 = 9\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 = 8\}}\,[\mathrm{a}]^{2}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\{\mathsf{is\_prime}(x_1 - 1)\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{\mathsf{is\_prime}(x_1)\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1 = 8\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{\mathsf{is\_prime}(x_1)\}}\,[\mathrm{a}]^{3}
}{\{x_1 = 9\}\ x_1 := x_1 - 1; x_1 := x_1 - 1\ \{\mathsf{is\_prime}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
}{\{x_1 = 10\}\ x_1 := x_1 - 1; x_1 := x_1 - 1; x_1 := x_1 - 1\ \{\mathsf{is\_prime}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

[1] mit $(x_1 = 10) \models (x_1 - 1 = 9)$
[2] mit $(x_1 = 9) \models (x_1 - 1 = 8)$
[3] mit $(x_1 = 8) \models (\mathsf{is\_prime}(x_1 - 1))$

$\square$