1. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist richtig?

A. Die Church–Turing-These besagt, dass alle Programmiersprachen Turing-vollständig sind.

B. Keine der Antworten.

C. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

E. Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt: f ist berechenbar auf einer RM gdw. f berechenbar auf einer TM.

---

2. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cup M) \cap N$?

A. $(L \cup M) \cap N = \varnothing$

B. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

C. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

D. $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

E. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{F, W\}, \Sigma, R, F)$, wobei

$$\Sigma := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), \mathsf{False}, \mathsf{True}, p, q, r, u\}$$

und die Regeln R wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow W \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \rightarrow F) \\ W &\rightarrow p \mid q \mid r \mid u \mid \mathsf{True} \end{aligned}$$

Welche Klasse hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht beschränkt.

B. Die Grammatik ist nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist beschränkt, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

F. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \overline{}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$.

B. Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$.

C. Für alle $a \in B$ gilt $\overline{\overline{a}} = a$.

D. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \overline{a}$.

E. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(\overline{a} + b) = ab$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$.

---

5. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	F	T
F	T	F

Stellen Sie die Wahrheitstabelle als aussagenlogische Formel über den Aussagenvariablen p und q dar, wobei p das erste und q das zweite Argument repräsentieren soll.

A. $(\neg q \vee \neg p) \vee q$.

B. $p \rightarrow (q \wedge p)$.

C. $(p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow \neg p)$.

D. $p \vee (p \wedge q) \rightarrow p$.

E. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

F. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \wedge \neg p \equiv \mathsf{False}$.

B. $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$.

C. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

D. $p \to p \equiv \mathsf{True}$.

E. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

F. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

---

7. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R

(P) $x_1 := x_1 + 1;\ x_1 := x_1 + 1;\ x_1 := x_1 + 1$
(Q) $x_1 = 0$
(R) $odd(x_1)$

wobei das Prädikatensymbol $odd(x)$ wahr ist, wenn x ungerade ist. Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\cdot, +, \mathsf{1}, \mathsf{0}\}$, wobei die Stelligkeit von $\cdot$ und $+$ jeweils zwei und die Stelligkeit von $\mathsf{1}$ und $\mathsf{0}$ jeweils null ist.

$$x = \mathsf{1}$$
$$\mathsf{1} + \mathsf{1} = \mathsf{0}$$
$$\mathsf{0} + \mathsf{0} = \mathsf{0}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash (\mathsf{0}+\mathsf{0}) \cdot \mathsf{0} = (\mathsf{1}+\mathsf{1}) \cdot \mathsf{1}$$

gilt. `[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen:

a) Es sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \, \epsilon \, \Sigma^* \textit{enthält eine gerade Anzahl } \mathsf{a}\}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

b) Gegeben sei die beschränkte Grammatik $G = (\{\mathsf{S}, \mathsf{B}\}, \{a, b\}, R, \mathsf{S})$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathsf{S} &\to a\mathsf{S} \mid \mathsf{B} \mid b\mathsf{S} \\ a\mathsf{B} &\to ab \\ b\mathsf{S} &\to b\mathsf{S}b \\ \mathsf{S}b &\to aa \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitung für den String *abab* an. `[8 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Schreiben Sie das `while`-Programm P für eine Registermaschine $R_\Sigma = ((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}, P)$, welche die Summe der Zahlen von 0 bis n berechnet.

Die Zahl n steht am Beginn in Register x_1. Das Programm soll das Ergebnis in Register x_2 schreiben. Verwenden Sie dazu das Hilfsprogramm $P_+(x_i, x_j, x_k)$. Wird P_+ mit den Werten (a, b, c) aufgerufen liefert es $(a + b, b, 0)$ als Ergebnis. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version2U"

```
Version 1:  E  E  F  F  F  F
```