1. Welches der folgenden klassischen Probleme der Informatik ist entscheidbar?

A. Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Gibt es ein Wort $x \in \mathsf{L}(G)$, sodass für x zwei verschiedene Linksableitungen existieren?

B. Gegeben zwei Listen von Wörtern $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$. Existieren Indices $i_1, \ldots, i_m$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$?

C. Das uniforme Halteproblem für Turingmaschinen. Das *uniforme* Halteproblem ist das Problem, ob ein gegebenes Programm auf jeder beliebigen Eingabe hält.

D. Gegeben ein beliebiges Programm P, ist P ein "hello, world"-Programm?

E. Das Halteproblem für die eingeschränkte Klasse von Turingmaschinen, die den Inhalt des unendlichen Bandes lesen, nicht aber verändern dürfen.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

A. Sei L eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann L nur dann von einer TM berechnet werden, wenn L regulär ist.

B. Für jede Sprache L, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.

C. Es gibt Funktionen $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

E. Jede totale Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen (bekannten) Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \rightarrow \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist rechtslinear.

E. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist falsch? Zur Erinnerung:

$$\mathcal{L}_3 = \text{reguläre Sprachen}$$
$$\mathcal{L}_2 = \text{kontextfreie Sprachen}$$
$$\mathcal{L}_1 = \text{kontextsensitive Sprachen}$$
$$\mathcal{L}_0 = \text{rekursiv aufzählbare Sprachen}$$
$$\mathcal{L} = \text{formale Sprachen}$$

A. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

B. $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

---

5. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$.

B. Für alle $a \in B$: $a + a = a$.

C. Es gilt also für alle $a, b, c \in B$: $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.

D. Für alle $a, b \in B$: $a \cdot b = b \cdot a$.

E. $\langle B; +, 0\rangle$ ist ein Monoid.

F. Für alle $a \in B$ gilt $a \cdot \sim (a) = 1$.

---

6. Welche der folgenden Aussagen zur Aussagenlogik ist richtig?

A. Es existiert eine Wahrheitsfunktion f, sodass f nicht durch eine Wahrheitstabelle ausgedrückt werden kann.

B. Es gelten die Gesetze von de Morgan, das heißt: $\neg(E \wedge F) \approx \neg E \wedge \neg F$

C. Es gilt die logische Äquivalenz: $A \vee \mathsf{True} \approx A$

D. Eine Formel A ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ erfüllbar ist.

E. Die Aussagenlogik ist vollständig axiomatisierbar, das heißt es existiert ein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Aussagenlogik.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie. Wir verwenden die üblichen Präzendenzen für binäre logische Operatoren.

$$\neg t \wedge q \wedge p \rightarrow (\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \rightarrow \neg(s \wedge \neg s) \vee q \rightarrow q \vee p \rightarrow r \wedge (\neg q \vee r)$$

`[16 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra mit der Trägermenge B. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in B$ das folgende Gesetz gilt:

$$\sim(a \cdot b) = \sim(a) + \sim(b) \ .$$

Dazu genügt es zu zeigen, dass (i) $(a \cdot b) + (\sim(a) + \sim(b)) = 1$ und (ii) $(a \cdot b) \cdot (\sim(a) + \sim(b)) = 0$ gilt.

a) Zeigen Sie (i). `[8 Punkte]`
b) Zeigen Sie (ii). `[8 Punkte]`

Hinweis: In den Beweisen genügt es Definitionsgesetze der Boolschen Algebra zu verwenden.

---

9. Formale Sprachen: Gegeben sei die folgende Grammatik G mit Startsymbol $STMT$:

$$
\begin{aligned}
STMT &\rightarrow ID := EXP \\
&\mid \mathsf{while}\ TEST\ \mathsf{do}\ STMT\ \mathsf{done} \\
&\mid \text{--}ID \\
&\mid STMT;\ STMT \\
TEST &\rightarrow TERM\ \mathsf{neq}\ TERM \\
EXP &\rightarrow TERM \mid EXP\ TOP\ TERM \\
TOP &\rightarrow + \mid \text{-} \\
TERM &\rightarrow ID \mid\ NAT \\
ID &\rightarrow CHAR \mid CHAR\ ID \\
CHAR &\rightarrow \mathsf{a} \mid \ldots \mid \mathsf{z} \mid \mathsf{A} \mid \ldots \mid \mathsf{Z} \\
NAT &\rightarrow DIGIT \mid DIGIT\ NAT \\
DIGIT &\rightarrow \mathsf{0} \mid \ldots \mid \mathsf{9}
\end{aligned}
$$

Die Grammtik G beschreibt die Syntax einer einfachen Programmiersprache. Betrachten sie das Program $P :=$ while i neq 0 do --i; --i done. Zeigen Sie mittels rekursiver Inferenz, dass P Teil der Sprache $L(G)$ ist. [16 Punkte]

---

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R

(P) $x_1 := x_1 - 1;\ x_1 := x_1 - 1;\ x_1 := x_1 - 1$
(Q) $x_1 = 10$
(R) $is\_prime(x_1)$

wobei das Prädikatensymbol $is\_prime(x)$ wahr ist, wenn x eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version3"

Version 1: E E E E F E