1. Welches der folgenden klassischen Probleme der Informatik ist entscheidbar?

A. Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Gibt es ein Wort $x \in \mathsf{L}(G)$, sodass für x zwei verschiedene Linksableitungen existieren?

B. Gegeben zwei Listen von Wörtern $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$. Existieren Indices $i_1, \ldots, i_m$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$?

C. Das uniforme Halteproblem für Turingmaschinen. Das *uniforme* Halteproblem ist das Problem, ob ein gegebenes Programm auf jeder beliebigen Eingabe hält.

D. Gegeben ein beliebiges Programm P, ist P ein "hello, world"-Programm?

E. Das Halteproblem für die eingeschränkte Klasse von Turingmaschinen, die den Inhalt des unendlichen Bandes lesen, nicht aber verändern dürfen.

---

2. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist rechtslinear.

E. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

3. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

4. Welche der folgenden Aussagen zur Algebra ist falsch?

A. Seien A, B Boolesche Ausdrücke und f, g ihre Booleschen Funktionen. Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Algebra der Boolschen Funktionen.

B. Die Algebra der Booleschen Funktionen ist eine Algebra.

C. Jede binäre Operation hat maximal ein neutrales Element.

D. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a \in B$ gilt $\overline{\overline{a}} = a$.

E. Jede Algebra ist auch eine Boolesche Algebra.

---

5. Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formel A ist falsch?

A. Für Formel A existiert eine KNF K, sodass $A \equiv K$ gilt.

B. Für A existiert eine DNF D, sodass $A \equiv D$ gilt.

C. Sei f die Wahrheitsfunktion von A. Zur Berechnung der DNF von f konzentriert man sich auf die Argumente $p_1, \ldots, p_n$ von f, sodass $f(p_1, \ldots, p_n) = \mathsf{T}$.

D. Sei f die Wahrheitsfunktion von A. Zur Berechnung der KNF von f konzentriert man sich auf die Argumente $p_1, \ldots, p_n$ von f, sodass $f(p_1, \ldots, p_n) = \mathsf{F}$.

E. Die Berechenbarkeit der KNF von A ist unentscheidbar.

---

6. Welche der folgenden Aussagen zur Aussagenlogik ist falsch?

A. Für jede Formel A existiert eine DNF D und eine KNF K, sodass $A \approx D \approx K$ gilt.

B. Wenn $A_1, \ldots, A, \ldots A_n \vdash B$ gilt, dann auch $A_1, \ldots, A_n \vdash A \to B$.

C. $A \approx B$ gilt gdw. $(A \to B) \wedge (B \to A)$ eine Tautologie ist.

D. Eine Formel A ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.

E. Jedes Axiomensystem für die Aussagenlogik ist vollständig.

---

7. Algebra: Formen Sie die Ausdrücke 1, 2 und 3 über der Booleschen Algebra

$$\langle \{\mathsf{True}, \mathsf{False}\}; \vee, \wedge, \neg, \mathsf{False}, \mathsf{True} \rangle$$

mit *aus der VO bekannten Äquivalenzen* um, um festzustellen welche der gegebenen Ausdrücke äquivalent sind. Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

1. $(\neg a \wedge (\neg c \vee b) \wedge (\neg c \vee a)) \vee c$

2. $((a \wedge \neg b) \vee c) \vee (\neg a \wedge b)$

3. $(a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg a \vee c)$

`[16 Punkte]`

---

8. Algebra: Betrachten Sie folgenden Gleichungen über der Signatur $F = \{\mathsf{a}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}$, wobei a die Stelligkeit 0, f die Stelligkeit 2, sowie g die Stelligkeit 1 haben:

$$E := \{\mathsf{f}(x, y) = \mathsf{f}(y, x), \mathsf{g}(x) = \mathsf{f}(x, \mathsf{a})\}$$

Zeigen Sie, dass $E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{a}, x) = \mathsf{g}(x)$ gilt.

Argumentieren Sie informell, übertragen Sie Ihre Argumentation in einen formalen Beweis. Notieren Sie die verwendeten Inferenzregeln der Gleichungslogik.

Sie erhalten die volle Punktezahl, wenn Sie den formalen Beweis mit verwendeten Regeln notieren.

---

9. Formale Sprachen:

a) Es sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ gegeben:

$$L = \{u\mathsf{b}v \mid u, v \in \Sigma^* \text{ und } \#\mathsf{c}(u) = \#\mathsf{a}(v)\},$$

wobei $\#\mathsf{a}(w)$ die Anzahl von Symbol a in Wort w repräsentiert. Geben Sie eine Grammatik G für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

b) Gegeben sei die unbeschränkte Grammatik $G = (\{S, A\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{b}SA\mathsf{c} \mid \mathsf{bac} \\ \mathsf{a}A &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{c}A &\to A\mathsf{c} \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitung für den String bbacc an. `[8 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Schreiben Sie ein `while`-Programm P für eine Registermaschine $R_{\dot{-}} = ((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}, P)$, welches $n \dot{-} m$ berechnet.

Am Beginn steht Zahl n in Register x_1, Zahl m in Register x_2 und eine unbekannte Zahl in Register x_3. Am Ende der Ausführung soll $n - m$ in Register x_3 stehen, falls $n > m$ und 0 sonst. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "versionU"

Version 1: E E E E E E