7. a) $F = (a \to \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (d \to \neg b)$ ist eine Tautologie und damit erfüllbar.

*Beweis.* (Methode von Quine)

(1) $F_{a \mapsto \mathsf{T}} = (\mathsf{T} \to \neg c) \vee (\mathsf{T} \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (d \to \neg b)$
$\equiv \neg c \vee (b \wedge c \wedge d) \vee (d \to \neg b)$

(1.1)
$F_{a,d \mapsto \mathsf{T}} = \neg c \vee (b \wedge c \wedge \mathsf{T}) \vee (\mathsf{T} \to \neg b) \equiv \neg c \vee (b \wedge c) \vee \neg b$
$\equiv (\neg b \vee \neg c) \vee (b \wedge c) \equiv \neg(b \wedge c) \vee (b \wedge c) \equiv \mathsf{T}$

(1.2)
$F_{a,d \mapsto \mathsf{F}} = (\neg c) \vee (b \wedge c \wedge \mathsf{F}) \vee (\mathsf{F} \to \neg b) \equiv \neg c \vee \mathsf{F} \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}$

(2) $F_{a \mapsto \mathsf{F}} = (\mathsf{F} \to \neg c) \vee (\mathsf{F} \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (d \to \neg b) \equiv \mathsf{T} \vee \mathsf{F} \vee (d \to \neg b) \equiv \mathsf{T}$

$F$ ist eine Tautologie weil (1) $F\{a \mapsto \mathsf{T}\}$ und (2) $F\{a \mapsto \mathsf{F}\}$ Tautologien sind.
(1) ist eine Tautologie weil (1.1) und (1.2) Tautologien sind. □

b) *Lösung.* Sei $A$ eine aussagenlogische Formel, die weder Negationen noch `False` enthält. Da wir nur Erfüllbarkeit von $A$ beweisen müssen, reicht es zu zeigen, dass es eine Belegung gibt, mit der $A$ wahr ist. Wir zeigen nun mittels struktureller Induktion, dass wenn alle Atome in $A$ mit wahr belegt werden, auch $A$ wahr ist:

BASIS: Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $A$ ist eine atomare Formel: dann kann $A$ mit dem Wahrheitswert `T` belegt werden und somit ist die ganze Formel $A$ wahr.
- $A$ ist ein Wahrheitswertsymbol: dann kann $A$ laut Vorraussetzung nur `True` sein und damit ist $A$ wahr.

SCHRITT: Wir beweisen die Aussage für die zusammengesetzten Formeln $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$ unter der Annahme, dass $A$ und $B$ wahr sind, wenn alle Atome mit wahr belegt werden (*Induktionsannahme*). Für $\neg A$ müssen wir nichts zeigen, da es die Vorraussetzung nicht erfüllt.

Wenn $A$ und $B$ beide wahr sind, folgt aus der Definition der Junktoren sofort, dass auch $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(A \to B)$ wahr sind.

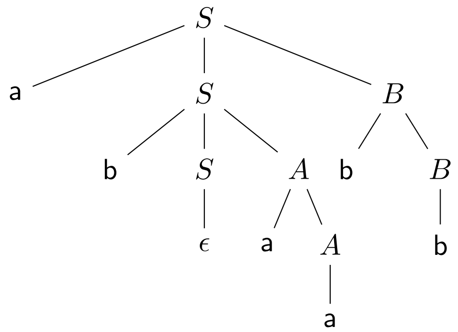
□

8. *Lösung.*

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\mathsf{b} = x \in E}{E \vdash \mathsf{b} = x}\,(\mathrm{a})
    }{E \vdash x = \mathsf{b}}\,(\mathrm{s})
    \qquad
    \dfrac{}{\mathsf{a} = \mathsf{a}}\,(\mathrm{r})
  }{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) = \mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a})}\,(\mathrm{k})
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{\mathsf{f}(x,\mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a},x) \in E}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a},x)}\,(\mathrm{a})
  }{E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})}\,(\mathrm{i},\{x \to \mathsf{b}\})
}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})}\,(\mathrm{t})
$$

□

9. *Lösung.* a)




b) $G_1$ ist nicht eindeutig, da es zum Beispiel für das Wort $\mathsf{aabbb}$ zwei unterschiedliche Linksableitungen gibt.
$S \Rightarrow \mathsf{a}SB \Rightarrow \mathsf{aa}SBB \Rightarrow \mathsf{aa}BB \Rightarrow \mathsf{aab}B \Rightarrow \mathsf{aabb}B \Rightarrow \mathsf{aabbb}$ $S \Rightarrow \mathsf{a}SB \Rightarrow \mathsf{aa}SBB \Rightarrow \mathsf{aa}BB \Rightarrow \mathsf{aab}BB \Rightarrow \mathsf{aabb}B \Rightarrow \mathsf{aabbb}$

c) $G_2 = (\{S\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln $R$ wie folgt definiert sind:

$$S \Rightarrow \mathsf{a}S\mathsf{bb} \mid \mathsf{c}$$

□

10. *Lösung.*

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{}{\{x_1+1+x_2-1=b\}\ x_2 := x_2-1\ \{x_1+1+x_2=b\}}\,[\mathrm{z}]
  }{
    \{x_1+x_2=b \wedge x_2 \neq 0\}\ x_2 := x_2-1\ \{x_1+x_2=b-1\}
  }\,[\mathrm{a}]^2
  \qquad
  \cfrac{
    \cfrac{}{\{x_1+1+x_2=b\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2=b\}}\,[\mathrm{z}]
  }{
    \{x_1+x_2=b-1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2=b\}
  }\,[\mathrm{a}]^{\equiv}
}{
  \cfrac{
    \cfrac{\{x_1+x_2=b \wedge x_2 \neq 0\}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2=b\}}{\{x_1+x_2=b\}\ \mathsf{while}\ x_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \mathsf{end}\ \{x_1+x_2=b \wedge x_2=0\}}\,[\mathrm{w}]
  }{
    \{x_1=0 \wedge x_2=b\}\ \mathsf{while}\ x_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \mathsf{end}\ \{x_1=b\}
  }\,[\mathrm{a}]^1
}\,[\mathrm{s}]
$$

[1] mit $(x_1=0 \wedge x_2=b) \models (x_1+x_2=b)$ und
$(x_1+x_2=b \wedge x_2=0) \models (x_1=b)$
[2] mit $(x_1+x_2=b \wedge x_2 \neq 0) \models (x_1+1+x_2-1=b)$

$\square$