1. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

A. Sei L eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann L nur dann von einer TM berechnet werden, wenn L regulär ist.

B. Für jede Sprache L, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.

C. Es gibt Funktionen $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

E. Jede totale Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist richtig?

A. Die Church–Turing-These besagt, dass alle Programmiersprachen Turing-vollständig sind.

B. Keine der Antworten.

C. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

E. Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt: f ist berechenbar auf einer RM gdw. f berechenbar auf einer TM.

---

3. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3$ = reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2$ = kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1$ = kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0$ = rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L}$ = formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$.

B. Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$.

C. Für alle $a \in B$ gilt $\sim (\sim (a)) = a$.

D. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \sim a$.

E. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(\sim a + b) = ab$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim (a + b) = \sim a + \sim b$.

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Booleschen Algebra ist richtig?

A. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a, b \in B$ gilt: $\sim (a + b) = \sim a + \sim b$.

B. Jeder Boolesche Ausdruck kann in eine disjunktive Normalform umgewandelt werden, nicht jedoch in eine konjunktive Normalform.

C. Die binäre Algebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra.

D. Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra, aber nicht jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

E. Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

B. $p \vee \neg p \equiv \mathsf{True}$.

C. $p \vee p \equiv p$.

D. $p \rightarrow \mathsf{False} \equiv \neg p$.

E. $\neg\neg p \equiv p$.

F. $p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p$.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$s \lor \neg s \to p \to r \lor q \to q \land r \to p \land \neg q \to q \lor \neg p \lor r$$

[16 Punkte]

---

8. Algebra: Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$ eine beliebige Boolesche Algebra. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung für alle $a, b \in B$ gültig ist:

$$\sim (a \cdot b) = \sim a + \sim b \quad .$$

Verwenden dürfen Sie dabei
(i) Axiome der Booleschen Algebra,
(ii) alle abgeleiteten Gesetze, **außer** die Gesetze von de Morgan.

Erläutern Sie alle notwendigen Schritte im Detail! `[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen: Gegeben sei die folgende Grammatik $G = (\{S, T, U\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln wie folgt definiert sind:

$$
\begin{aligned}
S &\to T \mid TU \\
T &\to \mathsf{a}T\mathsf{a} \mid \mathsf{b}T\mathsf{b} \mid \mathsf{c}U \mid \mathsf{c} \\
U &\to \mathsf{a}U \mid \mathsf{b}U \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{b}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie mittels rekursiver Inferenz, dass das Wort abcbbaab Teil der Sprache $L(G)$ ist. [16 Punkte]

---

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R

(P) `while` $x_1 \neq 0$ `do` $x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1$ `end`
(Q) $x_1 = a, x_2 = 0$
(R) $x_2 = a$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version3"

```
Version 1:  E  E  E  F  E  F
```