1. Welche der folgenden Aussagen zur Berechenbarkeitstheorie ist richtig?

A. Jedes lösbare Problem ist auch algorithmisch lösbar.

B. Es ist möglich ein Turingmaschinenprogramm zu schreiben, welches testet ob eine beliebige Grammatik mehrdeutig ist.

C. Die Church-Turing These impliziert, dass jede bekannte Programmiersprache Turing-vollständig ist.

D. Turingmaschinen mit einem zweiseitig unbeschränkten Band sind echt mächtiger als TMs mit einem einseitig beschränkten Band.

E. Turingmaschinen können nur mit einem einseitig unbeschränkten Band definiert werden.

F. Die Church-Turing These impliziert, dass jeder Algorithmus auch als Registermaschinenprogramm ausgedrückt werden kann.

---

2. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

3. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cup M) \cap N$?

A. $(L \cup M) \cap N = \varnothing$

B. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

C. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

D. $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

E. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a \cdot 0 = 0$ und $a + 0 = a$.

B. Für alle $a \in B$: $a + a = a$.

C. Es gilt also für alle $a, b, c \in B$: $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.

D. Für alle $a, b \in B$: $a \cdot b = b \cdot a$.

E. $\langle B; +, 0\rangle$ ist ein Monoid.

F. Für alle $a \in B$ gilt $a \cdot \overline{a} = 1$.

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Booleschen Algebra ist richtig?

A. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a, b \in B$ gilt: $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$.

B. Jeder Boolesche Ausdruck kann in eine disjunktive Normalform umgewandelt werden, nicht jedoch in eine konjunktive Normalform.

C. Die binäre Algebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra.

D. Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra, aber nicht jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

E. Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

B. $p \vee \neg p \equiv \mathsf{True}$.

C. $p \vee p \equiv p$.

D. $p \rightarrow \mathsf{False} \equiv \neg p$.

E. $\neg\neg p \equiv p$.

F. $p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p$.

---

7. Aussagenlogik:

a) Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((a \rightarrow \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (d \rightarrow \neg b)))$$

`[8 Punkte]`

b) Zeigen Sie: Eine Formel A der Aussagenlogik ist erfüllbar, wenn A keine Negation ($\neg$) und kein `False` enthält. `[8 Punkte]`

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}$, wobei a und b die Stelligkeit 0, und f und g die Stelligkeit 2 haben:

$$\mathsf{b} \approx x$$
$$\mathsf{f}(x, \mathsf{a}) \approx \mathsf{g}(\mathsf{a}, x)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$$

gilt.

---

9. Formale Sprachen: Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}SB \mid \mathsf{b}SA \mid \epsilon \\ A &\to \mathsf{a} \mid \mathsf{a}A \\ B &\to \mathsf{b} \mid \mathsf{b}B \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Syntaxbaum in Bezug auf G_1 für das Wort `abaabb` an. [4 Punkte]

b) Ist die Grammatik G_1 eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. [4 Punkte]

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 für die Sprache $\{\mathsf{a}^n\mathsf{c}\mathsf{b}^{2n} \mid n \geq 0\}$ an. [8 Punkte]

---

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R

(P) $\texttt{while}\ x_2 \neq 0\ \texttt{do}\ x_2 := x_2 - 1; x_1 := x_1 + 1\ \texttt{end}$
(Q) $x_1 = 0, x_2 = b$
(R) $x_1 = b$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “versionG”

```
Version 1:  F  E  E  F  E  F
```