7. *Lösung.* a) Die Formel ist erfüllbar aber keine Tautologie. Dies kann durch Angabe zweier Belegungungen v, sodass der Wahrheitswert der Formel einmal T und einmal F ist, gezeigt werden. Mit $\mathsf{v}(r) = \mathsf{F}$ und $\mathsf{v}(p) = \mathsf{v}(s) = \mathsf{v}(q) = \mathsf{T}$ hat die angegebene Formel den Wahrheitswert F. Mit allen anderen Belegungen hat sie den Wahrheitswert T.

   b) Es handelt sich hier um das zweite Absorptionsgesetz für die Disjunktion. Es kann z.B. durch das Aufstellen von Wahrheitstafeln nachgewiesen werden.

$\square$

8. *Lösung.* a) Wir definieren die rechtslineare Grammatik $G = (\{\mathsf{S}, \mathsf{U}\}, \{a, b\}, R, \mathsf{S})$ mit folgenden Regeln:

$$\mathsf{S} \to a\mathsf{S} \mid b\mathsf{U}$$
$$\mathsf{U} \to \epsilon \mid a\mathsf{U} \mid b\mathsf{S}$$

   b)

$$\underline{\mathsf{S}} \to \underline{b\mathsf{S}} \to b\underline{\mathsf{S}b} \to baa$$

$\square$

9. *Lösung.* Um eine IF-THEN-ELSE-Instruktion zu implementieren brauchen wir ein zusätzliches Register x_t. Das Register x_i bedingt die Ausführung von p_1, das Hilfsregister x_t bedingt die Ausführung von p_2. Wir nehmen zu Beginn an, dass $x_i = 0$ und p_2 ausgeführt werden soll. Falls nun doch $x_i > 0$, wird p_1 ausgeführt und x_i sowie x_t werden auf 0 gesetzt. Andernfalls wird p_2 ausgeführt und x_t auf 0 gesetzt.

```
x_t := x_t + 1;
WHILE x_i != 0 DO
  p_1;
  WHILE x_i != 0 DO
    x_i := x_i - 1
  END;
  x_t := x_t - 1
END;
WHILE x_t != 0 DO
  p_2;
  x_t := x_t - 1
END
```

$\square$

10. *Lösung.*

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{[z]}
\UnaryInfC{$\{C\}\ x_2 := x_2 - 1\ \{A\}$}
\RightLabel{[a]}
\UnaryInfC{$\{I \wedge x_1 \neq 0\}\ x_2 := x_2 - 1\ \{A\}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{[z]}
\UnaryInfC{$\{A\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{B\}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{[z]}
\UnaryInfC{$\{B\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{I\}$}
\RightLabel{[s]}
\BinaryInfC{$\{A\}\ x_1 := x_1 + 1; x_1 := x_1 + 1\ \{I\}$}
\RightLabel{[s]}
\BinaryInfC{$\{I \wedge x_2 \neq 0\}\ x_2 := x_2 - 1; x_1 := x_1 + 1; x_1 := x_1 + 1\ \{I\}$}
\RightLabel{[w]}
\UnaryInfC{$\{I\}\ \mathrm{P}\ \{I \wedge x_2 = 0\}$}
\RightLabel{[a]}
\UnaryInfC{$\{Q\}\ \mathrm{P}\ \{R\}$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
\text{(I)} & x_1 + 2 \cdot x_2 = c + 2 \cdot d & Q \models I \\
\text{(A)} & x_1 + 2 \cdot x_2 = c + 2 \cdot d - 2 & I \wedge x_2 = 0 \models R \\
\text{(B)} & x_1 + 2 \cdot x_2 = c + 2 \cdot d - 1 & I \wedge x_2 \neq 0 \models C \\
\text{(C)} & x_1 + 2 \cdot (x_2 - 1) = c + 2 \cdot d - 2 & A \cdot \{x_2 \mapsto x_2 - 1\} \equiv C \\
 & B \cdot \{x_1 \mapsto x_1 + 1\} \equiv A & I \cdot \{x_1 \mapsto x_1 + 1\} \equiv B
\end{array}
$$

□