1. Welche der folgenden Aussagen zur Aussagenlogik ist richtig?

A. Es existiert eine Wahrheitsfunktion f, sodass f nicht durch eine Wahrheitstabelle ausgedrückt werden kann.

B. Es gelten die Gesetze von de Morgan, das heißt: $\neg(E \wedge F) \equiv \neg E \wedge \neg F$

C. Es gilt die logische Äquivalenz: $A \vee \mathsf{True} \equiv A$

D. Eine Formel A ist eine Tautologie gdw. $\neg A$ erfüllbar ist.

E. Die Aussagenlogik ist vollständig axiomatisierbar, das heißt es existiert ein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Aussagenlogik.

---

2. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid \mathsf{00}S$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

---

3. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wenn $\mathring{A} = \langle A; \cdot, ! \rangle$ eine Algebra mit $A = \{a, b, c\}$ ist, sodass die Operationen $\cdot$ und ! wie folgt definiert sind:

$\cdot$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	a
c	c	c	a

!	
a	b
b	c
c	a

A. $!(!(x_1)) \approx\, !((!x_1) \cdot (!x_1))$

B. $!(!(x_1)) \approx\; x_1$

C. $(x_2 \cdot !(x_1)) \to \mathsf{True}$ ist ein algebraischer Ausdruck.

D. $\cdot(x_1, x_2, x_3)$ ist ein algebraischer Ausdruck.

E. ! ist ein algebraischer Ausdruck.

F. $!(x_1) \approx\; x_1 \cdot x_1$

---

4. Welche der folgenden Aussagen zur Verifikation nach Hoare ist richtig?

A. Eine Formel, die sowohl vor der Ausführung des Programmes, wie auch nachher falsch ist, nennt man Invariante.

B. Mit Hilfe der Hoare Regeln kann die totale Korrektheit eines Programmes nachgewiesen werden.

C. Eine Zusicherung ist eine aussagenlogische Formel.

D. Das Hoare-Triple $\{Q\}\ P\ \{R\}$ drückt aus, dass die Zusicherung R gilt, wenn das Programm P nicht hält und Q sonst.

E. Ein Hoare-Triple besteht aus drei Komponenten: einem Programm und zwei Zusicherungen.

---

5. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cup M) \cap N$?

A. $(L \cup M) \cap N = \varnothing$

B. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

C. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

D. $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

E. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

---

6. Welches der folgenden klassischen Probleme der Informatik ist entscheidbar?

A. Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Gibt es ein Wort $x \in \mathsf{L}(G)$, sodass für x zwei verschiedene Linksableitungen existieren?

B. Gegeben zwei Listen von Wörtern $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$. Existieren Indices $i_1, \ldots, i_m$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$?

C. Das uniforme Halteproblem für Turingmaschinen. Das *uniforme* Halteproblem ist das Problem, ob ein gegebenes Programm auf jeder beliebigen Eingabe hält.

D. Gegeben ein beliebiges Programm P, ist P ein "hello, world"-Programm?

E. Das Halteproblem für die eingeschränkte Klasse von Turingmaschinen, die den Inhalt des unendlichen Bandes lesen, nicht aber verändern dürfen.

---

7. Betrachten Sie die aussagenlogische Formel A:

$$(s \rightarrow t) \wedge (p \wedge q \rightarrow \neg p \vee \neg s)$$

a) Ist die Formel A *erfüllbar*? Begründen Sie Ihre Antwort! `[4 Punkte]`

b) Ist die Formel A eine *Tautologie*? Begründen Sie Ihre Antwort! `[4 Punkte]`

c) Wandeln Sie die Formel A in eine *konjunktive Normalform* um. `[4 Punkte]`

c) Wandeln Sie die Formel A in eine *disjunktive Normalform* um. `[4 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\cdot, +, \mathsf{1}, \mathsf{0}\}$, wobei die Stelligkeit von $\cdot$ und $+$ jeweils zwei und die Stelligkeit von $\mathsf{1}$ und $\mathsf{0}$ jeweils null ist.

$$\begin{aligned} \mathsf{0} &= y \\ \mathsf{0} + \mathsf{0} &= \mathsf{1} \\ \mathsf{1} + \mathsf{1} &= \mathsf{1} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash (\mathsf{0}+\mathsf{0}) \cdot \mathsf{0} = (\mathsf{1}+\mathsf{1}) \cdot \mathsf{1}$$

gilt. `[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen: Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, B\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$S \to \mathsf{a}S\mathsf{c} \mid BB \mid \epsilon$$
$$B \to \mathsf{b}$$

a) Geben Sie $\mathsf{L}(G)$ in Mengennotation an. `[4 Punkte]`

b) Geben Sie eine Linksableitung in der Grammatik G für das Wort `aabbcc` an. `[4 Punkte]`

c) Geben Sie einen Syntaxbaum in Bezug auf G für dasselbe Wort `aabbcc` an. `[4 Punkte]`

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G_2 = (\{S\}, \{\mathsf{0}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$S \to SS \mid \mathsf{0} \mid \epsilon$$

d) Ist die Grammatik G_2 mehrdeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Gegeben sei die folgende Turingmaschine

$$M = (\{s, p, q, u, t, r\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup, \vdash\}, \sqcup, \vdash, \delta, s, t, r)$$

wobei die Übergangsfunktion wie folgt definiert ist:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$	p	$\sqcup$	$(q, \sqcup, L)$
s	$\sqcup$	$(t, \sqcup, R)$	q	b	$(u, \sqcup, L)$
s	a	$(p, \vdash, R)$	u	b	(u, b, L)
p	a	(p, a, R)	u	a	(u, a, L)
p	b	(p, b, R)	u	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$

a) Sind die Wörter ϵ bzw. aabb in der Sprache von M? `[4 Punkte]`

b) Gegeben sei die Startkonfiguration $(s, \vdash \mathsf{abb}\sqcup^\omega, 0)$. Führen Sie so lange wie möglich Rechenschritte mit der Rechenschrittrelation (für einen Schritt) auf Turingmaschinen aus und geben Sie die Sequenz der Konfigurationen an. `[6 Punkte]`

c) Welche Sprache beschreibt M? `[6 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version2"

```
Version 1:  E  E  F  E  E  E
```