1. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist richtig?

A. Die Church–Turing-These besagt, dass alle Programmiersprachen Turing-vollständig sind.

B. Keine der Antworten.

C. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar, aber nicht umgekehrt.

E. Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gilt: f ist berechenbar auf einer RM gdw. f berechenbar auf einer TM.

---

2. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{F, W, V\}, \Sigma, R, F)$, wobei

$$\Sigma := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), \mathsf{False}, \mathsf{True}, p, q, r\}$$

und die Regeln R wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow V \mid W \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \rightarrow F) \\ W &\rightarrow \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \\ V &\rightarrow p \mid q \mid r \end{aligned}$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht beschränkt.

B. Die Grammatik ist nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist beschränkt, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

F. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

3. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

4. Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra und sei $F = x_1 + (x_2 \cdot \sim (x_1))$ ein Boolscher Ausdruck. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

B. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

C. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

D. F ist kein algebraischer Ausdruck.

E. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f\colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

---

5. Welche der folgenden Aussagen ist falsch, wenn $\mathring{A} = \langle A; \cdot, ! \rangle$ eine Algebra mit $A = \{a, b, c\}$ ist, sodass die Operationen $\cdot$ und ! wie folgt definiert sind:

$\cdot$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	a
c	c	c	a

!	
a	b
b	c
c	a

A. $!(!(x_1)) \approx\ (!x_1) \cdot (!x_1)$

B. $!(!(x_1)) \approx !(x_1 \cdot x_1)$

C. $x_2 \cdot x_1$ ist ein algebraischer Ausdruck.

D. $x_1 \cdot x_1$ ist ein algebraischer Ausdruck.

E. $!(x)$ ist ein algebraischer Ausdruck.

F. $!(x_1) \approx\ x_1 \cdot (x_1 \cdot x_1)$

---

6. Für welche Formeln A, B gilt $A, B \models p \rightarrow q$? (Nur eine Möglichkeit ist richtig.)

A. $A = r,\ B = \neg s$

B. $A = p \wedge r,\ B = r \wedge p$

C. $A = p,\ B = \not q$

D. $A = p,\ B = r$

E. $A = p,\ B = q$

---

7. Aussagenlogik:

a) Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((p \to s) \to r \to q) \to q \land r \to p \lor \neg s$$

[8 Punkte]

b) Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit folgender Äquivalenz:

$$p \land (\neg p \lor q) \equiv p \land q$$

[8 Punkte]

---

8. Formale Sprachen:

a) Es sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \,\epsilon\, \Sigma^* \textit{enthält eine gerade Anzahl } \mathsf{a}\}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

b) Gegeben sei die beschränkte Grammatik $G = (\{\mathsf{S}, \mathsf{B}\}, \{a, b\}, R, \mathsf{S})$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \mathsf{S} &\to a\mathsf{S} \mid \mathsf{B} \mid b\mathsf{S} \\ a\mathsf{B} &\to ab \\ b\mathsf{S} &\to b\mathsf{S}b \\ \mathsf{S}b &\to aa \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitung für den String $abab$ an. `[8 Punkte]`

---

9. Berechenbarkeitstheorie: Implementieren Sie die Instruktion

$$\text{IF } x_i \text{ THEN } p \text{ END}$$

basierend auf den verfügbaren Instruktionen einer Registermaschine. Das Programm p soll genau einmal ausgeführt werden, wenn $x_i > 0$. Es ist nicht notwendig den Zustand von x_i zu speichern.

Hinweis: Beachten Sie, dass x_i auch größer als 1 sein kann. `[16 Punkte]`

---

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R

(P) `while` $x_1 \neq 0$ `do` $x_1 := x_1 - 1; x_2 := x_2 + 1; x_2 := x_2 + 1$ `end`
(Q) $x_1 = m, x_2 = n$
(R) $x_2 = 2 \cdot m + n$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “versionG”

```
Version 1:  E  F  E  E  F  E
```