universität innsbruck

Functional Programming	WS 2017/2018	LVA 703024+703025
Exercises 10		January 19, 2018

All Solutions

2. Let $P' = P \cup \{x :: \mathsf{Int}\}$.

1	$\mathsf{True} :: \mathsf{Bool}$	$\mathsf{ins}\ P'$
2	$x :: \mathsf{Int}$	$\mathsf{ins}\ P'$
3	$+ :: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$	$\mathsf{ins}\ P'$
4	$- :: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$	$\mathsf{ins}\ P'$
5	$1 :: \mathsf{Int}$	$\mathsf{ins}\ P'$
6	$(+)\ x :: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$	$\mathsf{app}\ 3,\ 2$
7	$x + 1 :: \mathsf{Int}$	$\mathsf{app}\ 6,\ 5$
8	$(-)\ x :: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}$	$\mathsf{app}\ 4,\ 2$
9	$x - 1 :: \mathsf{Int}$	$\mathsf{app}\ 8,\ 5$
10	$\textbf{if}\ \mathsf{True}\ \textbf{then}\ x + 1\ \textbf{else}\ x - 1 :: \mathsf{Int}$	$\mathsf{ite}\ 1,\ 7,\ 9$

3.

1	$x :: \alpha_0$	assumption
2	$y :: \alpha_1$	assumption
3	$x :: \alpha_0$	copy 1
4	$\lambda y.\, x :: \alpha_1 \to \alpha_0$	abs 2–3
5	$\lambda xy.\, x :: \alpha_0 \to \alpha_1 \to \alpha_0$	abs 1–4

4.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pair}(\mathsf{Bool}, \alpha_0) \approx \mathsf{Pair}(\alpha_1, \mathsf{Int}) &\Rightarrow^{(\mathsf{d}_1)}_{\{\}} \mathsf{Bool} \approx \alpha_1; \alpha_0 \approx \mathsf{Int} \\
&\Rightarrow^{(\mathsf{v}_2)}_{\{\alpha_1/\mathsf{Bool}\}} \alpha_0 \approx \mathsf{Int} \\
&\Rightarrow^{(\mathsf{v}_1)}_{\{\alpha_0/\mathsf{Int}\}} \square
\end{aligned}
$$

Hence the solution is the composition of $\{\alpha_1/\mathsf{Bool}\}$ and $\{\alpha_0/\mathsf{Int}\}$, that is,

$$\sigma = \{\alpha_0/\mathsf{Int}, \alpha_1/\mathsf{Bool}\}$$

5. The only possible first step is (d_1), resulting in

$$\mathsf{Bool} \approx \alpha_0; \alpha_0 \approx \mathsf{Int}$$

Then we can either apply (v_2) on the first equality or (v_1) on the second one. In both cases the result is

$$\mathsf{Bool} \approx \mathsf{Int}$$

We have not reached $\square$ yet, but still no further unification rule is applicable. Hence, the initial problem is not unifiable.

6. First we turn the resulting typing inference problem into a unification problem:

$$\underline{P \rhd \textbf{let } suc = \lambda x.\, x+1 \textbf{ in let } d = \lambda x.\, suc\ (suc\ x) \textbf{ in } d\ 2 :: \alpha_0}$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{let})} P \rhd \lambda x.\, x+1 :: \alpha_1; \underline{P, suc :: \alpha_1 \rhd \textbf{let } d = \lambda x.\, suc\ (suc\ x) \textbf{ in } d\ 2 :: \alpha_0}$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{let})} \underline{P \rhd \lambda x.\, x+1 :: \alpha_1}; \underline{P, suc :: \alpha_1 \rhd \lambda x.\, suc\ (suc\ x) :: \alpha_2}; P, suc :: \alpha_1, d :: \alpha_2 \rhd d\ 2 :: \alpha_0$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{asb})^2} \alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6;$$
$$\underline{P, x :: \alpha_3 \rhd x+1 :: \alpha_4}; \underline{P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd suc\ (suc\ x) :: \alpha_6}; \underline{P, suc :: \alpha_1, d :: \alpha_2 \rhd d\ 2 :: \alpha_0}$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{app})^3} \alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6;$$
$$P, x :: \alpha_3 \rhd (+)\ x :: \alpha_7 \to \alpha_4; \underline{P, x :: \alpha_3 \rhd 1 :: \alpha_7};$$
$$\underline{P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd suc :: \alpha_8 \to \alpha_6}; P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd suc\ x :: \alpha_8;$$
$$\underline{P, suc :: \alpha_1, d :: \alpha_2 \rhd d :: \alpha_9 \to \alpha_0}; \underline{P, suc :: \alpha_1, d :: \alpha_2 \rhd 2 :: \alpha_9}$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{con})^4} \alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6; \mathsf{Int} \approx \alpha_7; \alpha_1 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_2 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9$$
$$\underline{P, x :: \alpha_3 \rhd (+)\ x :: \alpha_7 \to \alpha_4}; \underline{P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd suc\ x :: \alpha_8};$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{con})^2} \alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6; \mathsf{Int} \approx \alpha_7; \alpha_1 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_2 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9$$
$$\underline{P, x :: \alpha_3 \rhd (+) :: \alpha_{10} \to \alpha_7 \to \alpha_4}; \underline{P, x :: \alpha_3 \rhd x :: \alpha_{10}};$$
$$\underline{P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd suc :: \alpha_{11} \to \alpha_8}; \underline{P, suc :: \alpha_1, x :: \alpha_5 \rhd x :: \alpha_{11}};$$

$$\Rightarrow^{(\mathsf{con})^4} \alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6; \mathsf{Int} \approx \alpha_7; \alpha_1 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_2 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \alpha_7 \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_1 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \alpha_5 \approx \alpha_{11}$$

Then we solve this unification problem:

$$\underline{\alpha_1 \approx \alpha_3 \to \alpha_4}; \alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6; \mathsf{Int} \approx \alpha_7; \alpha_1 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_2 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \alpha_7 \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_1 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \alpha_5 \approx \alpha_{11}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_1 \mapsto \alpha_3 \to \alpha_4\}}$$
$$\underline{\alpha_2 \approx \alpha_5 \to \alpha_6}; \mathsf{Int} \approx \alpha_7; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_2 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \alpha_7 \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \alpha_5 \approx \alpha_{11}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_2 \mapsto \alpha_5 \to \alpha_6\}}$$
$$\underline{\mathsf{Int} \approx \alpha_7}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_5 \to \alpha_6 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \mathsf{Int} \approx \alpha_9;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \alpha_7 \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \alpha_5 \approx \alpha_{11}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_7 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_5 \to \alpha_6 \approx \alpha_9 \to \alpha_0; \underline{\mathsf{Int} \approx \alpha_9};$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \mathsf{Int} \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \alpha_5 \approx \alpha_{11}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_9 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_5 \to \alpha_6 \approx \mathsf{Int} \to \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \mathsf{Int} \to \alpha_4; \alpha_3 \approx \alpha_{10}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8; \underline{\alpha_5 \approx \alpha_{11}}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_5 \mapsto \alpha_{11}\}}$$
$$\alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6; \alpha_{11} \to \alpha_6 \approx \mathsf{Int} \to \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \mathsf{Int} \to \alpha_4; \underline{\alpha_3 \approx \alpha_{10}}; \alpha_3 \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_3 \mapsto \alpha_{10}\}}$$
$$\underline{\alpha_{10} \to \alpha_4 \approx \alpha_8 \to \alpha_6}; \underline{\alpha_{11} \to \alpha_6 \approx \mathsf{Int} \to \alpha_0};$$
$$\underline{\mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \approx \alpha_{10} \to \mathsf{Int} \to \alpha_4}; \underline{\alpha_{10} \to \alpha_4 \approx \alpha_{11} \to \alpha_8}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{d})^+}$$
$$\alpha_{10} \approx \alpha_8; \alpha_4 \approx \alpha_6; \underline{\alpha_{11} \approx \mathsf{Int}}; \alpha_6 \approx \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \approx \alpha_{10}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \alpha_4; \alpha_{10} \approx \alpha_{11}; \alpha_4 \approx \alpha_8$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_{11} \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\alpha_{10} \approx \alpha_8; \alpha_4 \approx \alpha_6; \alpha_6 \approx \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \approx \alpha_{10}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \alpha_4; \underline{\alpha_{10} \approx \mathsf{Int}}; \alpha_4 \approx \alpha_8$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_1})}_{\{\alpha_{10} \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\underline{\mathsf{Int} \approx \alpha_8}; \alpha_4 \approx \alpha_6; \alpha_6 \approx \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \alpha_4; \alpha_4 \approx \alpha_8$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_8 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\alpha_4 \approx \alpha_6; \alpha_6 \approx \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \alpha_4; \underline{\alpha_4 \approx \mathsf{Int}}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_4 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\underline{\mathsf{Int} \approx \alpha_6}; \alpha_6 \approx \alpha_0;$$
$$\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_6 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\underline{\mathsf{Int} \approx \alpha_0};$$
$$\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}; \mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{v_2})}_{\{\alpha_0 \mapsto \mathsf{Int}\}}$$
$$\underline{\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}}; \underline{\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}}; \underline{\mathsf{Int} \approx \mathsf{Int}}$$
$$\Rightarrow^{(\mathsf{t})^+}$$
$$\square$$

The resulting most general unifier is

$$\{\alpha_0 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_1 \mapsto \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}, \alpha_2 \mapsto \mathsf{Int} \to \mathsf{Int}, \alpha_3 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_4 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_5 \mapsto \mathsf{Int},$$
$$\alpha_6 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_7 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_8 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_9 \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_{10} \mapsto \mathsf{Int}, \alpha_{11} \mapsto \mathsf{Int}\}$$