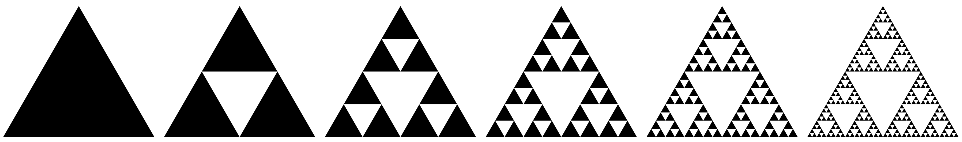
Brückenkurs Mathematik

Tobias Hell, Daniela Schiefeneder & Friederike Waldner



Universität Innsbruck
Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vorlesungsteil

Kapitel 1
Induktion

In diesem Kapitel werden wir das Prinzip der vollständigen Induktion sowie einige Anwendungsbeispiele kennenlernen.

1.1 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wir möchten zeigen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr ist. Dies können wir mittels **vollständiger Induktion** über n bewerkstelligen. Dazu geht man wie folgt vor:

(IA) **Induktionsanfang:** Man zeigt, dass $A(n_0)$ wahr ist. $(n = n_0)$

(IS) **Induktionsschluss:** Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ fest.

Induktionsvoraussetzung: Man nimmt $A(n)$ als wahr an. (IV)

Induktionsschritt: Man zeigt, dass $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt. $(n \to n+1)$

Damit ist dann gezeigt, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq n$ gilt. Denn laut Induktionsanfang ist $A(n_0)$ wahr und aus dem Induktionsschritt erhält man somit die Richtigkeit der Aussage $A(n_0 + 1)$. Daraus folgt wiederum aus dem Induktionsschritt, dass dann auch $A(n_0 + 2)$ gilt und so weiter und so fort.

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so schreiben wir

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Beispielsweise ist

$$1 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

Beispiel 1.1 (Gaußsche[1] Summenformel) Wir zeigen

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \,,$$

mittels vollständiger Induktion über n.

[1] *Carl Friedrich Gauß*, 1777–1855, deutscher Mathematiker

(IA) $\boxed{n = 1:}$ Offenbar gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}\,. \qquad \checkmark$$

(IS) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{IV}$$

$\boxed{n \to n+1:}$ Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \overset{(IV)}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

und damit der Induktionsschritt gezeigt. □

Beispiel 1.2 (Summe von Quadratzahlen) Man zeige, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

1.2 Die Türme von Hanoi

Die Türme von Hanoi sind ein mathematisches Knobelspiel. Es besteht aus drei Stäben und mehreren gelochten Scheiben, welche alle verschieden groß sind und auf die Stäbe gesteckt werden können. Die drei Stäbe werden im Weiteren mit A, B und C bezeichnet.

Ziel des Spiels ist es, alle Scheiben vom Stab A unter zur Hilfenahme von Stab B auf den Stab C zu versetzen. Dabei müssen folgende Regeln eingehalten werden.

Die Regeln. Anfangs stecken alle Scheiben der Größe nach geordnet auf dem Stab A. Bei jedem Zug darf nun die oberste Scheibe eines Stabes auf einen anderen gelegt werden, aber nur wenn dort keine kleinere Scheibe liegt. Also muss stets eine Pyramidenform auf jedem Stab erhalten bleiben — die Scheiben sind stets der Größe nach geordnet.

Optimale Zugfolge. Diese Aufgabe soll in möglichst wenigen Zügen gelöst werden, es wird also eine optimale Zugfolge gesucht. Wie wir sehen werden, gibt es sogar nur eine solche Zugfolge. Ist $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu Beginn des Spiels auf dem Stab A plazierten Schreiben, so bezeichnen wir mit $Z(n)$ die Anzahl der Züge für die optimale Zugfolge.

Behauptung. $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ Z(n) = 2^n - 1$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über die Anzahl n der Scheiben.

(IA) $\boxed{n = 1:}$ Es liegt nur eine Scheibe auf Stab A. Offensichtlich besteht die optimale Zugfolge darin, diese Scheibe von Stab A auf Stab C zu legen. Daher ist

$$Z(1) = 1 = 2^1 - 1\,. \qquad \checkmark$$

(IS) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$Z(n) = 2^n - 1\,. \tag{IV}$$

$\boxed{n \to n+1:}$ Da wir nach Induktionsvoraussetzung bereits die minimale Anzahl an Zügen kennen, um n Scheiben von einem Stab auf einen anderen umzuschichten, erhält man die optimale Zugfolge für $n+1$ Scheiben nun wie folgt:

(1) die obersten n Scheiben werden von Stab A auf Stab B umgeschichtet

(2) von Stab A wird die unterste Scheibe auf Stab C verschoben

(3) die n Scheiben von Stab B werden auf Stab C umgeschichtet

Folglich ist

$$Z(n+1) \overset{(IV)}{=} 2Z(n) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

und damit der Induktionsschritt gezeigt. □

n	2	3	4	5	6	...	64
$Z(n)$	3	7	15	31	63	...	18446744073709551615

1.3 EINBAHNSTRASSEN

Am folgenden Beispiel sehen wir, dass man mittels vollständiger Induktion nicht nur Formeln beweisen kann, sondern auch komplexe Aussagen. Außerdem sieht man, dass die Argumentation recht kompliziert sein kann. Induktionsbeweise sind keineswegs immer einfach!

BEISPIEL 1.3 (EINBAHNSTRASSEN) In einem höchst merkwürdigen und weit entfernten Land gibt es nur Einbahnstraßen. Je zwei Städte sind durch genau eine Straße verbunden. Zeige, dass es sicher eine Stadt gibt, die von jeder anderen Stadt aus direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreicht werden kann.

Beweis. Eine Stadt, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt (also: Sie kann von jeder anderen direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreicht werden), nennen wir „gut“. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Städte n.

Induktionsanfang: Die Aussage stimmt sicher für $n = 2$ (oder auch für $n = 1$, dann ist sie aber nicht sonderlich interessant).
Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung sei bereits gezeigt für n beliebige Städte. Gegeben seien nun $n + 1$ Städte. Wir wählen irgendeine Stadt S aus und betrachten nur die übrigen n Städte. Nach Induktionsvoraussetzung existiert unter diesen eine gute Stadt G. Die übrigen $n - 1$ Städte unterteilen wir in zwei Mengen, und zwar die Menge D aller Städte, von denen aus man G direkt erreicht, und die Menge E aller Städte, für die das nicht möglich ist. Da G gut ist, besitzt jede Stadt aus E eine direkte Straße in eine der Städte in D. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1: Es gibt eine direkte Straße von S nach G oder von S in eine Stadt in D. Dann ist G eine gute Stadt für alle $n + 1$ Städte.
Fall 2: Von G und von jeder Stadt in D führt eine Straße nach S. Dann ist S gut, denn von G und jeder Stadt aus D lässt sich S direkt erreichen und von jeder Stadt aus E über eine Stadt aus D (siehe oben).

1.4 Platonische Körper und der Eulersche Polyedersatz

Wir wollen uns nun geometrischen Körpern widmen, welche eine besonders regelmäßige Struktur aufweisen. Genauer betrachten wir nun dreidimensionale Körper, die aus identen, regelmäßigen Flächenstücken zusammengesetzt sind. Das wohl bekannteste Beispiel eines solchen *Platonischen Körpers* ist der Würfel, dieser besteht aus sechs Quadraten.
Um alle platonischen Körper zu erfassen, werden wir den *Eulerschen Polyedersatz* verwenden. Dieser besagt, dass für jeden konvexen Polyeder (=Vielflächer ohne einspringende Ecken)

$$E + F = K + 2 \tag{EPS}$$

gilt, wobei E die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten bezeichnet. Diesen Satz beweisen wir wie folgt: Durch Verwendung der Zentralprojektion des gegebenen Polyeders können wir diesen als sogenannten planaren Graphen darstellen, vgl. etwa die Zentralprojektion des Würfels. Anschaulich wird eine Fläche entfernt und die Kanten nach außen gezogen, wodurch wir den Körper auf die Ebene projezieren. Nun starten wir mit dem einfachsten planaren Graphen und zwar jenem, der nur aus einer Ecke besteht. Da dieser nur eine Fläche besitzt und keine Kanten, ist $E + F - K = 1 + 1 - 0 = 2$ und somit (EPS) erfüllt. Alle weiteren planaren Graphen lassen sich nun dadurch erzeugen, indem wir die folgenden beiden Operationen mehrfach durchführen:

(1) Wir fügen eine Ecke hinzu und verbinden diese über eine Kante mit dem bestehenden Graphen.

(2) Sofern dies noch nicht der Fall ist, werden zwei Ecken durch eine Kante verbunden.

Bei Operation (1) erhöht sich sowohl E als auch K um eins, während F gleich bleibt. Daher gilt für den aus dieser Operation entstehenden Graphen immer noch (EPS). Auch nach Anwendung von Operation (2) behält (EPS) seine Gültigkeit, denn E bleibt unverändert und sowohl F als auch K werden um eins erhöht. Da sich nun aber jeder planare Graph durch diese beiden Operationen aus dem Graphen mit nur einer Ecke gewinnen lässt, zeigt dies, dass (EPS) für jeden planaren Graphen und somit für jeden konvexen Polyeder gilt.

Um die platonischen Körper zu charakterisieren, bezeichne e die Anzahl der Ecken des zugrundeliegenden, regelmäßigen Flächenstücks, aus dessen Kopien sich der gesuchte Körper zusammensetzt, und k die Anzahl der Kanten, welche von einer Ecke ausgehen. Jede Kante verbindet zwei Ecken und besitzt zwei angrenzende Flächen. Daher muss

$$eF = 2K = kE$$

gelten. Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt zudem $E + F = K + 2$. Dies führt auf

$$E = \frac{4e}{4-(2-e)(2-k)}\,, \quad K = \frac{2ek}{4-(2-e)(2-k)} \quad \text{und} \quad F = \frac{4k}{4-(2-e)(2-k)}\,.$$

Hieraus erkennt man, dass $e, k > 2$ sowie $4-(2-e)(2-k) > 0$ und somit $k < 2e/(e-2)$ gelten muss. Damit schließen wir

$$(e, k) \in \{(3,3), (4,3), (3,4), (5,3), (3,5)\}\,,$$

cf. Abbildung 1.1. Dies führt auf die in Tabelle 1.1 aufgelisteten fünf platonischen Körper.

Name	Ausgangsfläche	Ecken	Kanten	Flächen	(e, k)
Tetraeder	Dreieck	4	6	4	$(3,3)$
Würfel	Quadrat	8	12	6	$(4,3)$
Oktaeder	Dreieck	6	12	8	$(3,4)$
Dodekaeder	Fünfeck	20	30	12	$(5,3)$
Ikosaeder	Dreieck	12	30	20	$(3,5)$

TABELLE 1.1 Die fünf platonischen Körper und ihre Daten.

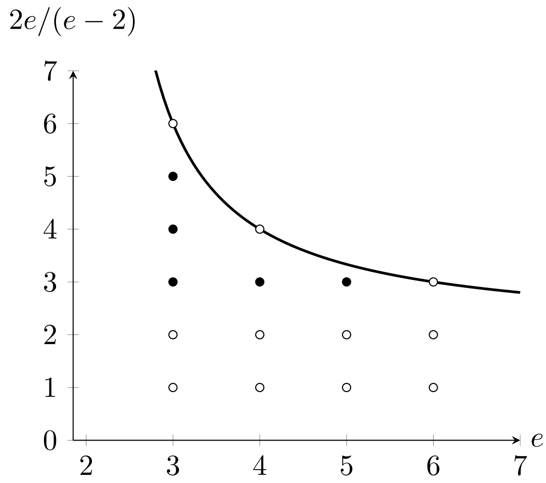


Abbildung 1.1 Zulässige Punktepaare (e, k) .

Übungsaufgaben

(1.1) Analysiere den folgenden Induktionsbeweis:

Behauptung. Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Pferde.

(IA) $\boxed{n = 1:}$ Dies ist offensichtlich. ✓

(IS) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte, dass in einer Menge von n Pferden alle dieselbe Farbe haben. (IV)

$\boxed{n \to n + 1:}$ Wir betrachten nun eine Menge von $n + 1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die — aufgrund der Induktionsvoraussetzung — alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n + 1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen.

Somit können in jeder beliebig großen, endlichen Menge von Pferden nur Pferde derselben Farbe enthalten sein. Das geht aber nur, wenn wirklich alle Pferde dieselbe Farbe haben. □

(1.2) Wir betrachten folgende Ungleichungen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \frac{1}{n^2} < 2 \tag{1.1}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \tag{1.2}$$

(a) Welche der beiden Ungleichungen ist „schärfer“, impliziert also die andere? Zu vermuten ist, dass die schärfere Ungleichung schwieriger zu beweisen ist.

(b) Versuche, beide Ungleichungen mit Induktion zu beweisen.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass in (1.1) die Zahl 2 durch $\pi^2/6$ (aber durch keine kleinere Zahl) ersetzt werden kann.

(1.3) (a) Zeige, dass für $a = 2 + \sqrt{3}$ die Zahl $a + \frac{1}{a}$ eine natürliche Zahl ist.

(b) Für welche natürlichen Zahlen n gibt es eine reelle Zahl a, sodass $a + \frac{1}{a} = n$?

(c) Zeige mit vollständiger Induktion: Wenn $a + \frac{1}{a}$ eine ganze Zahl ist, so ist auch $a^k + \frac{1}{a^k}$ eine ganze Zahl für $k = 2, 3, \dots$

(1.4) Auf einer runden Rennstrecke stehen einige Benzinkanister, die zusammen genau so viel Benzin enthalten, wie ein Auto benötigt, um eine ganze Runde fahren zu können. Zeige, dass man an einem geeigneten Ort (bei einem Kanister) starten kann und die ganze Runde fahren kann, wenn man mit leerem Tank startet, aber alle Kanister, die man unterwegs findet, zum Nachfüllen des Tanks verwenden kann.

(1.5) Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $7^{2n-1} + 5$ durch 12 teilbar ist.

(1.6) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Schließe daraus

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\,.$$

(1.7) Es sei n ein natürliche Zahl. In einem Affenkäfig mit n Affen stehen n Kletterstangen. Damit die Affen etwas Bewegung bekommen, platzieren die Wärter zur Fütterung jeweils eine Banane oben an jeder Stange. Zusätzlich verbinden sie die Stangen mit einer endlichen Anzahl an Seilen, sodass zwei verschiedene Seilenden an verschiedenen Punkten festgemacht werden. Wenn ein Affe eine Stange hochklettert und ein Seil findet, kann er nicht widerstehen und wird sich über das Seil hangeln, bevor er seinen Aufstieg fortsetzt. Jeder Affe startet bei einer anderen Stange. Zeige, dass jeder Affe eine Banane bekommt.

(1.8) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$. Zeige, dass

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \,.$$

(1.9) Für $n \in \mathbb{N}$ beweise man: Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner $10n$ beträgt $20n^2$.

(1.10) *Winkelsumme in Vielecken.* Die Winkelsumme in einem n-Eck in der Ebene beträgt $\pi(n-2)$. Wie könnte diese Aussage mittels Induktion bewiesen werden. Gib die einzelnen Beweisschritte wieder und überlege dir passende Skizzen. Worin besteht hier der Induktionsschritt?

(1.11) Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $n^5 - n$ durch 5 teilbar ist.

(1.12) Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist.

(1.13) Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass $3^{(2^n)} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar

Kapitel 2
Unendliche Reihen

2.1 Geometrische Summe

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl und sind $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so schreiben wir

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Beispielsweise ist

$$1 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \,. \qquad \text{(Gaußsche Summenformel)}$$

Für $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Summe

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k =: S_n \,. \qquad \text{(geometrische Summe)}$$

Im Fall $q = 1$ erhalten wir offenbar $S_n = n + 1$. Wir zeigen nun, dass

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1 \tag{$\star$}$$

gilt. Dazu multiplizieren wir S_n mit q und betrachten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \,, \\ S_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \,. \end{aligned}$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, so führt dies auf

$$(1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$$

und damit ist ($\star$) gezeigt. Dieses Resultat wollen wir nun in Zusammenhang mit folgendem Beispiel bringen.

Beispiel 2.1 (Treuer Hund) Die Problemstellung lautet wie folgt:

> *Ein Wanderer geht einen 6 km langen Weg zu einer Almhütte. Sein Hund läuft voraus zur Hütte hinauf, dreht dort um und läuft ihm wieder bergab entgegen. Wieder bei ihm angekommen, dreht er wieder um, usw. Der Hund läuft bergauf eineinhalbmal, bergab doppelt so schnell wie der Wanderer geht. Welche Strecke hat der Hund zurückgelegt, als der Wanderer oben ankommt?*

Mit $s > 0$ bezeichnen wir die Länge des Weges. Als ersten Schritt in Richtung einer Antwort auf die gestellte Frage, bestimmen wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die Strecke s_n, welche der Hund zwischen der n-ten und der $(n+1)$-ten Begegnung mit dem Wanderer zurücklegt.

(1) Bei der ersten Begegnung hat der Wanderer eine Strecke von $\frac{7}{9}s$ zurückgelegt, der Hund entsprechend $s_0 = \frac{11}{9}s$.

(2) Begegnen sich Wanderer und Hund das zweite Mal, so hat der Hund von der restlichen Strecke $\frac{2}{9}s$ wiederum $\frac{11}{9}$ zurückgelegt. Also ist $s_1 = \frac{11}{9} \cdot \frac{2}{9}s$.

(3) Die verbleibende Strecke bei der zweiten Begnung ist $\frac{2}{9}s$ und somit $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}s$ bei der dritten Begnung. Auch von dieser Strecke legt der Hund $\frac{11}{9}$ zurück und wir erhalten $s_2 = \frac{11}{9} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 s$.

Induktiv schließen wir, dass der Hund zwischen der n-ten und der $(n+1)$-ten Begegnung die Strecke $s_n = \frac{11}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n s$ zurücklegt. Damit ist der Hund bei der $(n+1)$-ten Begegnung also die Gesamtstrecke

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{11s}{9} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{9}\right)^k$$

gelaufen. Mit $q = 2/9$ erhalten wir nach $(\star)$

$$G_n = \frac{11s}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{11s}{7} - \frac{11s}{7}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}.$$

Um die ursprüngliche Fragestellung beantworten zu können, müssen wir uns noch überlegen, was wir für $n \to \infty$ erhalten.

2.2 Geometrische Reihe

Ist $q \in \mathbb{R}$, so schreiben wir wiederum

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,. \qquad (n\text{-te Partialsumme})$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen bezeichnet man als *geometrische Reihe* und für diese schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\,.$$

Wir interessieren uns für den Reihenwert $\lim_{n\to\infty} S_n$, den wir – sofern der Grenzwert existiert – ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ bezeichnen. Wie wir bereits wissen, gilt

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1\,.$$

Es ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$, denn für $q = 0$ ist dies offensichtlich und für $q \neq 0$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = \lim_{n\to\infty} |q|^n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n\log|q|} \overset{(\star_1)}{=} \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty} n\log|q|} \overset{(\star_2)}{=} 0\,,$$

wobei wir in $(\star_1)$ die Stetigkeit der Exponentialfunktion und $\log|q| < 0$ in $(\star_2)$ verwendet haben. Damit schließen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1\,.$$

FORTSETZUNG VON BEISPIEL 2.1. Da $|2/9| < 1$, ist die vom Hund zurückgelegte Strecke also gleich dem Reihenwert

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \frac{11s}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{11s}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{11}{7}s\,.$$

Ist der Weg 6 km lang, läuft der Hund also 66/7 km.

2.3 TELESKOPSUMMEN

Für $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir um $(\star)$ für die geometrische Summe zu zeigen, die Identität

$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

nachgewiesen. Wenn wir auf der linken Seite $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ einsetzen, erhalten wir

$$(1-q)S_n = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}\left(q^k - q^{k+1}\right)\,.$$

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl und sind $a_0, a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \,. \tag{Teleskopsumme}$$

Bei der Berechnung der geometrischen Summe haben wir diese also geschickt ergänzt (Multiplikation mit $1-q$), sodass eine Teleskopsumme ensteht. Diese ist dann einfach zu berechnen, denn

$$\sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) = -\sum_{k=0}^{n} \left(q^{k+1} - q^k\right) = -(q^{n+1} - 1) = 1 - q^{n+1} \,.$$

Wir betrachten folgendes Beispiel.

Beispiel 2.2 (Teleskopsumme) Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} \,.$$

Wir faktorisieren zunächst den Nenner: Für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$k^2 + k = k(k+1)$$

und daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{k^2 + k} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \,, \quad \text{mit } A, B \in \mathbb{R} \,.$$

Für alle $k = 1, \dots, n$ muss also

$$1 = Ak + A + Bk$$

gelten. Daraus folgt $A = 1$ und $B = -1$. Einsetzen in die Summe liefert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \,.$$

Wir erkennen, dass es sich um eine Teleskopsumme handelt und erhalten somit

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \,.$$

2.4 Teleskopreihen

Wie bereits bei der geometrischen Reihe geschehen, bezeichnen wir die Folge der Partialsummen einer Teleskopsumme als *Teleskopreihe*. Die Berechnung des Reihenwerts ist auch hier einfach.
Wenn wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Partialsumme wieder mit S_n bezeichnen, also

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) \ ,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_0) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_0 \, .$$

Zu klären ist dann natürlich noch, ob dieser Grenzwert überhaupt existiert.

Fortsetzung von Beispiel 2.2. Ist man am Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$$

interessiert, so muss lediglich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

berechnet werden. Da die sich $1/(n+1)$ für große n beliebig nahe Null nähert, ist dieser Grenzwert Null. Folglich erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = 1 \, .$$

Die große Herausforderung bei der Berechnung von Reihenwerten mit Hilfe der Darstellung als Teleskopreihe besteht darin, die Summanden entsprechend zu zerlegen oder zu ergänzen. Wir demonstrieren dies an einem weiteren Beispiel.

Beispiel 2.3 (Teleskopreihe und Logarithmus) Wir interessieren uns für den Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \, .$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k\,.$$

Somit handelt es sich bei

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ um eine Teleskopsumme und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)\,.$$

Für $n \to \infty$ wird $\log(n+1)$ beliebig groß und daher auch der Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\,.$$

In diesem Fall sagt man, dass die Reihe *bestimmt gegen* ∞ *divergiert* und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \infty\,.$$

2.5 Die harmonische Reihe

Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{2.1}$$

und wollen zeigen, dass diese sogenannte *harmonische Reihe* bestimmt gegen ∞ divergiert. Das bedeutet, dass die Partialsummen

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

beliebig groß werden. Man beachte dabei, dass die einzelnen Summanden $1/n$ immer kleiner werden und sich immer mehr an Null annähern. Es ist auf den ersten Blick (v. a. im Vergleich mit der geometrischen Reihe und ähnlichen Beispielen) vielleicht nicht intuitiv, dass eine Summe aus immer kleiner werdenden Termen insgesamt beliebig groß werden kann. Dabei ist es aber gar nicht schwer, dies zu sehen, wir geben zwei verschiedene Beweise:

Beweis 1: Wir vergleichen die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ miteinander. Bekanntlich gilt für die Eulersche Zahl $\mathrm{e} \approx 2{,}718281828\ldots$, die auch die Basis der natürlichen Logarithmen ist, die Ungleichung

$$\mathrm{e} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Dies erhält man aus

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}\,.$$

Aus dieser Ungleichung folgt durch Anwendung des Logarithmus:

$$1 > k \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \implies \frac{1}{k} > \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

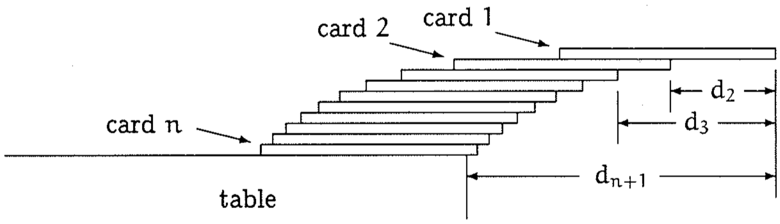
Daraus folgt, dass die uns hier interessierenden Partialsummen größer sind als die Partialsummen in Beispiel 2.2, von denen wir schon wissen, dass sie beliebig groß werden (bestimmt gegen ∞ divergieren). Also haben wir auch gezeigt, dass die harmonische Reihe (2.1) bestimmt gegen ∞ divergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ nennt man in diesem Fall dann eine *Minorante* für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. □

Beweis 2: Wir zeigen die Divergenz der harmonischen Reihe noch auf eine andere Weise, wieder suchen wir eine *divergente Minorante*. Und zwar betrachten wir die Partialsumme S_n für eine Zweierpotenz $n = 2^N$, wobei $N \in \{0,1,2,\ldots\}$.

$$\begin{array}{llllr}
s_{2^N} = & 1+ & \geq & 1 & \geq \quad 1 \\
& +\frac{1}{2}+ & \geq & +\frac{1}{2}+ & \geq \quad +\frac{1}{2}+ \\
& +\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ & \geq & +\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+ & \geq \quad +\frac{1}{2}+ \\
& +\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+ & \geq & +\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+ & \geq \quad +\frac{1}{2}+ \\
& +\ldots+ & \geq & +\ldots+ & \geq \quad +\ldots+ \\
& +\frac{1}{2^{N-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^N} & \geq & +\frac{1}{2^N}+\ldots+\frac{1}{2^N} & \geq \quad +\frac{1}{2}.
\end{array}$$

Wir sehen daraus, dass $s_{2^N} \geq 1 + N \cdot \frac{1}{2}$, das heißt die harmonische Reihe divergiert bestimmt gegen ∞. □

BEISPIEL 2.4 (KARTENÜBERHANG) Wir behandeln nun die Frage nach dem maximalen Überhang, den man (theoretisch) mit genügend vielen Karten im nebenstehenden Bild erreichen kann. Dabei haben alle Karten eine Länge von $d = 2$ Einheiten. Den mit n Karten erzielbaren maximalen Überhang bezeichnen wir mit d_{n+1}.



- ▷ Nach dieser Notation gilt $d_1 = 0$.

- ▷ Offensichtlich ist $d_2 = 1$, denn bei einer Karte legt man den Mittelpunkt genau über die Tischkante, sodass der Überhang genau die halbe Kartenlänge beträgt.

- ▷ Bei zwei Karten muss der Mittelpunkt der oberen genau über der Kante der unteren legen und der gemeinsame Schwerpunkt von beiden genau über der Tischkante. Daraus folgt durch die zweite Karte ein zusätzlicher maximaler Überhang von $\frac{1}{2}$, also gilt $d_3 = 1 + \frac{1}{2}$.

- ▷ Bei n Karten erhalten wir die Bedingung, dass der gemeinsame Schwerpunkt der obersten k Karten ($k = 1, \ldots, n$) genau über der Kante der nächsten Karte bzw. im Fall $k = n$ über der Tischkante liegt. Wenn wir alle Abstände wie im Bild eingezeichnet vom Ende der obersten Karte nach links messen, so liegt die Kante der k–ten Karte genau an der Position d_k und somit liegt der Mittelpunkt der k–ten Karte an der Position $d_k + 1$. Daraus folgt

$$d_{n+1} = \frac{(1 + d_1) + \ldots + (1 + d_n)}{n},$$

und dies lässt sich äquivalent umformen zu $nd_{n+1} = n + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Wenn wir dies vergleichen mit der analogen Formel, in der n ersetzt wird durch $n - 1$, also

$$(n-1)d_n = n - 1 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1},$$

so erhalten wir durch Subtraktion

$$nd_{n+1} - (n-1)d_n = 1 + d_n$$

bzw. $d_{n+1} = d_n + \frac{1}{n}$.

Aus dieser Rekursion folgt nun unmittelbar

$$d_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\,.$$

Der gesuchte maximale Überhang ist also gerade eine Partialsumme der harmonischen Reihe. Da wir oben gezeigt haben, dass diese Partialsummen bestimmt gegen ∞ divergieren, sehen wir nun, dass sich mit beliebig vielen Karten (theoretisch) ein beliebig großer Überhang erreichen lässt.

Bemerkung 2.5 Die harmonische Reihe strebt ziemlich langsam gegen ∞. Eine genauere Version des ersten Beweises ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k > \mathrm{e} > \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
\Longrightarrow\ k\log\left(1+\frac{1}{k-1}\right) > 1 > k\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
\Longrightarrow\ \log\left(1+\frac{1}{k-1}\right) > \frac{1}{k} > \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
\Longrightarrow\ 1+\log n = 1+\sum_{k=2}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k-1}\right) > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log(n+1)
\end{aligned}$$

Um zum Beispiel einen Überhang von 5 Kartenlängen, also 10 Einheiten zu erreichen, braucht man also zwischen $\mathrm{e}^9 \approx 8103$ und $\mathrm{e}^{10} \approx 22026$ (genau: 12367) Karten.

Übungsaufgaben

(2.1) Vor und zurück. Zuerst springen wir einen Meter nach vorne, davon dann die Hälfte – also einen halben Meter – wieder zurück. Anschließend springen wir von der letzten Sprunglänge die Hälfte nach vorne und davon dann wieder die Hälfte zurück. Angenommen, wir wiederholen das unendlich oft.

(a) Welche Strecke legen wir insgesamt durch Sprünge zurück, wenn wir sämtliche Sprunglängen zusammenzählen?

(b) Welche Strecke ergibt sich, wenn man die Sprünge nach vorne positiv und die Sprünge nach hinten negativ zählt?

(2.2) Ungerade Zahlen. Wir wollen den Wert der Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots$$

berechnen.

(a) Wie lässt sich die n-te Partialsumme berechnen?

(b) Betrachte anschließend den Grenzwert für $n \to \infty$ der Partialsummen.

(2.3) Fliege und Züge. Zwei 200 km voneinander entfernte Züge fahren geradlinig aufeinander zu. Jeder Zug fährt mit 50 km/h. Eine Fliege startet zeitgleich am Anfang eines Zuges und fliegt mit 75 km/h zwischen den fahrenden Zügen hin und her. Sie fliegt solange bis die Züge aufeinander prallen und die Fliege eingeklemmt wird.

(a) Welche Distanz hat die Fliege zurückgelegt?

(b) Wie lässt sich die Situation grafisch veranschaulichen?

(c) Untersuche verschiedene Lösungswege.

(2.4) Aus der hamonischen Reihe werden alle Reihenglieder entfernt, bei denen im Nenner 9 als Ziffer in der Dezimaldarstellung auftritt. Zeige, dass die entstehende Reihe konvergiert. Anleitung:

(a) Wie viele Summanden bleiben übrig, deren Nenner in $\{10^{k-1}, \ldots, 10^k - 1\}$ ist, wobei $k \in \mathbb{N}$?

(b) Was ist der größte dieser Summanden?

(c) Welche Abschätzung ergibt sich daraus für die Partialsummen?

(2.5) Ein langsamer, aber ausdauernder Wurm W startet an einem Ende eines 1 m langen Gummibandes und krabbelt einen Zentimeter pro Minute auf das andere Ende zu. Am Ende jeder Minute streckt ein ebenso ausdauernder Aufseher A, dessen einziger Lebenszweck es ist, W zu frustrieren, das Gummiband um einen Meter. Während der Streckung behält W seine relative Position – 1% zum Start, 99% zum Ziel – bei, das heißt W ist nun 2 cm vom Startpunkt und 198 cm vom Ziel entfernt. Nachdem W noch eine Minute gekrabbelt ist, steht es 3 cm zu 197 cm, aber A streckt das Gummiband wieder und dann steht es 4.5 cm zu 295.5 cm, und so weiter. Erreicht W jemals das Ziel? Er bewegt sich dauernd, aber das Ziel scheint sich noch schneller weg zu bewegen. (Wir nehmen für und W und A eine unendliche Lebensdauer und eine unendliche Dehnbarkeit des Gummibandes an.)
Anleitung:

(a) Wir bezeichnen den nach n Minuten zurückgelegten Prozentanteil des Gummibandes mit a_n. Was sind a_1 und a_2?

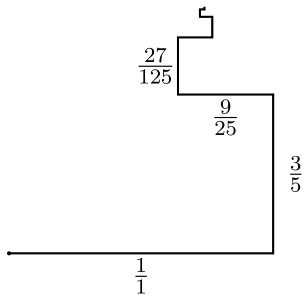
(b) Wie lang ist das Gummiband nach n Minuten?

(c) Welcher Prozentanteil – bezogen auf die aktuelle Länge des Gummibandes – wird in der n–ten Minute zurückgelegt?

(d) Welche Formel ergibt sich daraus für a_n?

(e) Wie groß muss a_n werden, damit der Wurm das Ziel erreicht? Tritt das jemals ein?

(2.6) Eine Maus startet (im Nullpunkt) und bewegt sich zunächst einen Meter in x-Richtung und biegt dann nach links; nach 3/5 Meter biegt sie nochmals nach links; nach 9/25 Meter biegt sie nach rechts; nach weiteren 27/125 Meter biegt sie nochmals nach rechts usw. (siehe Skizze). Angenommen die Maus fährt auf diese Weise unendlich oft fort, landet die Maus auf einem speziellen Punkt? Falls ja, geben Sie die Koordinaten an.
Hinweis: Betrachten Sie die beiden Koordinaten getrennt.



Kapitel 3

Interpolation

3.1 Einleitung

Eine reelle *Polynomfunktion* P ist gegeben durch

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, …, a_n und $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn $a_n \neq 0$ ist, so heißt n der *Grad* von P. Bekanntlich ist der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 0 oder 1 eine Gerade und beim Grad 2 eine Parabel. Unter *Polynominterpolation* versteht man die Aufgabe, die Koeffizienten so zu bestimmen, dass bestimmte vorgegebene Werte angenommen werden, also

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_m) = y_m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Die Stellen $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_m \in \mathbb{R}$ müssen dabei paarweise verschieden sein, unter den Werten $y_0,\ \ldots,\ y_m \in \mathbb{R}$ können auch gleiche auftreten. Wir werden weiter unten sehen, dass das Problem immer eindeutig lösbar ist, wenn es gleich viele Wertepaare (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, m$, wie zu bestimmende Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gibt, also für $m = n$.

Beispiel 3.1 Bestimme das Interpolationspolynom vom Grad 3 für die Wertepaare $(-1, -5)$, $(0, 5)$, $(1, -1)$, $(4, 5)$.

Lösung 3.2 Gesucht sind reelle Zahlen $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$ und $a_3 = d$, sodass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
-5 &= P(-1) = a - b + c - d && (3.1)\\
5 &= P(0) = a && (3.2)\\
-1 &= P(1) = a + b + c + d && (3.3)\\
5 &= P(4) = a + 4b + 16c + 64d && (3.4)
\end{aligned}$$

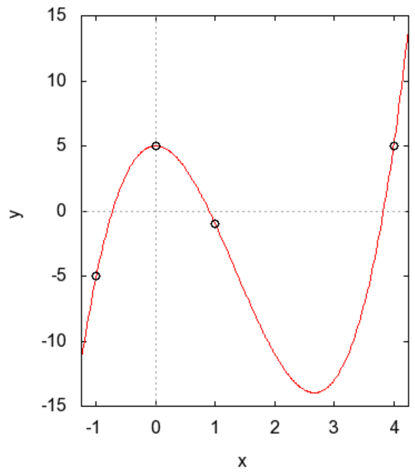
Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem und erhalten:

$$\begin{aligned} (3.2): &\quad a = 5, \\ (3.1)+(3.3): &\quad 2a+2c = -5-1 = -6,\ c = -8 \\ (3.3)-(3.1): &\quad 2b+2d = -1+5 = 4,\ b+d = 2 \\ (3.4): &\quad 4b+64d = 8\cdot 16,\ b+16d = 32 \end{aligned}$$

Schließlich führt dies auf $a = 5$, $b = 0$, $c = -8$, $d = 2$, also das Polynom P mit

$$P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

welches tatsächlich die Bedingungen erfüllt. Beachte im nebenstehenden Graphen die unterschiedliche Skalierung der Achsen im Verhältnis 1:5.



Für den Beweis, dass das Interpolationspolynom immer eindeutig bestimmt ist, benötigen wir zunächst einen Hilfssatz:

LEMMA 3.3 Es sei P eine reelle Polynomfunktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) x_0 ist eine Nullstelle von P, das heißt $P(x_0) = 0$.

(2) $P(x)$ ist durch $x - x_0$ teilbar, das heißt es gibt eine reelle Polynomfunktion Q, sodass gilt $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$.

Beweis. Mittels „Polynomdivision“ kann man immer eine Polynomfunktion Q und eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ („Rest“) finden, sodass

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0) + r.$$

Einsetzen von $x = x_0$ ergibt $P(x_0) = r$, also: (1) $\iff$ $P(x_0) = 0$ $\iff$ $r = 0$ $\iff$ (2). □

Damit können wir nun folgenden Satz beweisen.

SATZ 3.4 Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sowie $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein Polynom P vom Grad $\leq n$ mit $P(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die *Eindeutigkeit.* Gilt für zwei Polynome P_1 und P_2, dass $P_1(x_i) = y_i = P_2(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, n$, so ist das Polynom $P_1(x) - P_2(x)$ laut Lemma durch $(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ teilbar, das heißt es gilt

$$P_1(x) - P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) Q(x)$$

für ein Polynom Q. Wenn P_1 und P_2 vom Grad $\leq n$ sind, so gilt das auch für $P_1 - P_2$. Dann muss aber $Q = 0$ sein, also gilt $P_1 = P_2$.
Die *Existenz* folgt aus der *Lagrangeschen Interpolationsformel*, wir setzen

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}.$$

Denn das dadurch definierte Polynom P hat offensichtlich Grad $\leq n$ und für $i = 0, 1, \dots, n$ gilt $P(x_i) = y_i$. □

BEMERKUNG 3.5 Wir setzen

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y_0\mathbf{e}_0 + y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n, \text{ wobei } \mathbf{e}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann lässt sich die Formel im Beweis des obigen Satzes folgendermaßen motivieren: Wenn wir Polynome $\ell_i(x)$ für $i = 0, \dots, n$ finden können mit $\ell_k(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$, so erfüllt das Polynom $P(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$ die Bedingungen $P(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.
Das gesuchte Polynom $\ell_k(x)$ hat hat aber die Nullstellen $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ und ist daher von der Form $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)Q(x)$. Da der Grad $\leq n$ sein soll, muss Q konstant sein und wegen $\ell_k(x_k) = 1$ ergibt sich

$$\ell_k(x) := \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

BEISPIEL 3.6 In Beispiel 3.1 war $n = 3$ und $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{(-1)(-2)(-5)} = \frac{-x^3+5x^2-4x}{10}, \\
\ell_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(1)(-1)(-4)} = \frac{x^3-4x^2-x+4}{4}, \\
\ell_2(x) &= \frac{(x+1)x(x-4)}{(2)(1)(-3)} = \frac{-x^3+3x^2+4x}{6}, \\
\ell_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{(5)(4)(3)} = \frac{x^3-x}{60}.
\end{aligned}$$

Speziell für $y_0 = -5$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$, $y_3 = 5$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0} y_k l_k(x) = -5l_0(x) + 5l_1(x) - l_2(x) + 5l_3(x) = \\
&= \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{2} + \frac{5(x^3 - 4x^2 - x + 4)}{4} + \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{6} + \frac{x^3 - x}{12} \\
&= \frac{(6 + 15 + 2 + 1)x^3 + (-30 - 60 - 6)x^2 + (24 - 15 - 8 - 1)x + 60}{12} = 2x^3 - 8x^2 + 5.
\end{aligned}
$$

3.2 Newton-Interpolation

Wollen wir nachträglich einen weiteren Interpolationspunkt hinzufügen, so müssten wir bei Verwendung der Lagrangeschen Interpolationformel sämtliche Koeffizienten neu bestimmen. Für praktische Berechnungen erweist sich daher die *Newtonsche*[1] *Interpolationsformel* als besser geeignet. Dabei besteht die Idee darin, das gesuchte Interpolationspolynom in der Form

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

anzusetzen. Wie können nun die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ effizient berechnet werden?

$$
\begin{array}{ll}
P_n(x_0) = c_0 \overset{!}{=} y_0 & \Rightarrow c_0 = y_0 \\
P_n(x_1) = y_0 + c_1(x_1 - x_0) \overset{!}{=} y_1 & \Rightarrow c_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
P_n(x_2) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \overset{!}{=} y_2 & \Rightarrow c_2 = \dfrac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\
\quad\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

Man erkennt, dass nach folgendem Schema, dem *Schema der dividierten Differenzen*, vorgegangen werden kann.

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 & y_1 & \rightarrow & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 & y_2 & \rightarrow & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \rightarrow & \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\
\vdots & \vdots & & & & \qquad \ddots \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

[1] *Sir Isaac Newton*, 1643–1727

Beispiel 3.7 Wir greifen nochmals Beispiel 3.1 auf, die Interpolationspunkte lauten also

$$
\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (-1, -5)\,, \\
(x_1, y_1) &= (0, 5)\,, \\
(x_2, y_2) &= (1, -1)\,, \\
(x_3, y_3) &= (4, 5)\,.
\end{aligned}
$$

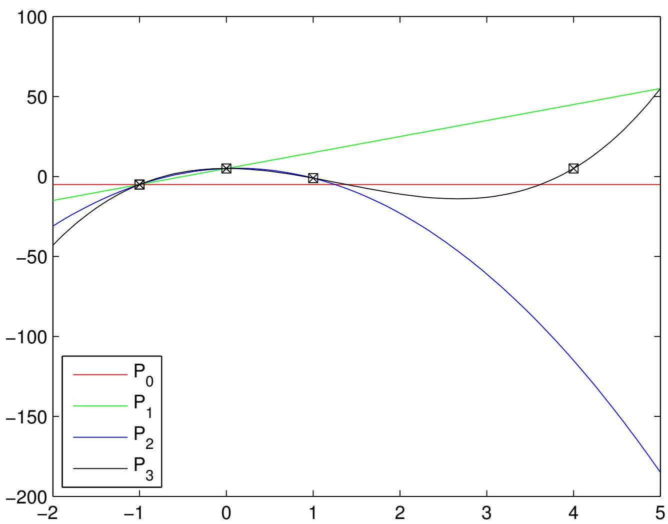
Anwendung des Schemas der dividierten Differenzen liefert

$$
\begin{array}{ccccccccc}
-1 & -5 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
0 & 5 & \rightarrow & 10 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
1 & -1 & \rightarrow & -6 & \rightarrow & -8 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
4 & 5 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 2 & \rightarrow 2 &
\end{array}
$$

und somit erhalten wir das Interpolationspolynom

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= -5 + 10(x+1) - 8(x+1)x + 2(x+1)x(x-1) \\
&= 2x^3 - 8x^2 + 5\,.
\end{aligned}
$$

In nachfolgendem Plot sind die Graphen der sukzessive berechneten Interpolationspolynome dargestellt.

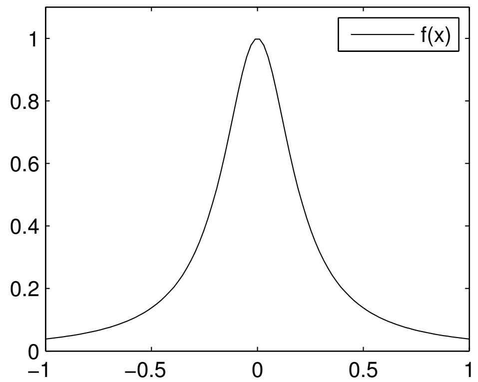


3.3 Approximation

Unter *Approximation* versteht man die Aufgabe, eine gegebene Funktion durch eine „einfachere“ Funktion anzunähern. Beispielsweise wollen wir die sogenannte *Runge*[2]*-Funktion*

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{1+25x^2}$$

durch ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ approximieren.



Dazu wählen wir Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ im Intervall $[-1,1]$ und werten die Funktion f an diesen Stellen aus. Dies liefert die $n+1$ Interpolationspunkte

$$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

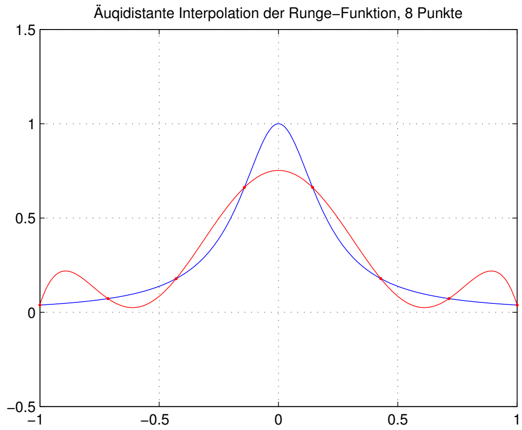
und wir können das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom P_n vom Grad kleiner gleich n durch diese Punkte bestimmen. Wie wählt man nun aber $x_0, \ldots, x_n$?

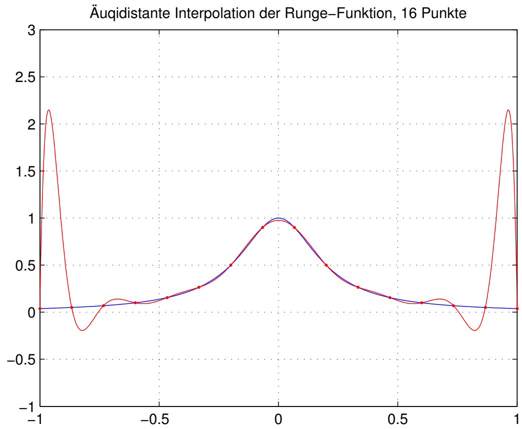
Eine naheliegende Wahl ist jene der *äquidistanten Stützstellen*, d.h.

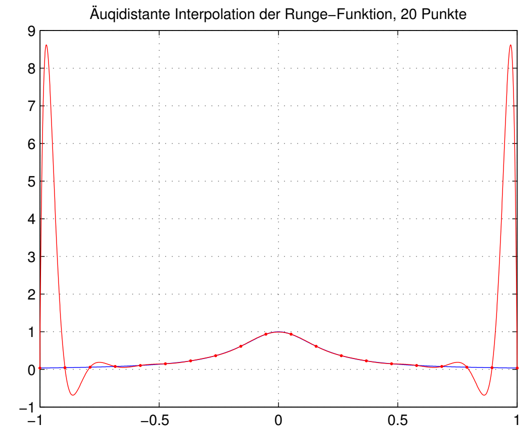
$$x_k = -1 + \frac{2k}{n}, k = 0, \ldots, n.$$

Die nachfolgenden Grafiken zeigen die Interpolationspolynome zu diesen Stützstellen für $n = 7, 15, 19$.

[2] *Carl Runge*, 1856–1927, deutscher Mathematiker







Das „Ausbrechen“ des Interpolationspolynoms von höherem Grad am Rand nennt sich das *Phänomen von Runge*. Wie kann dieses Verhalten vermieden werden?

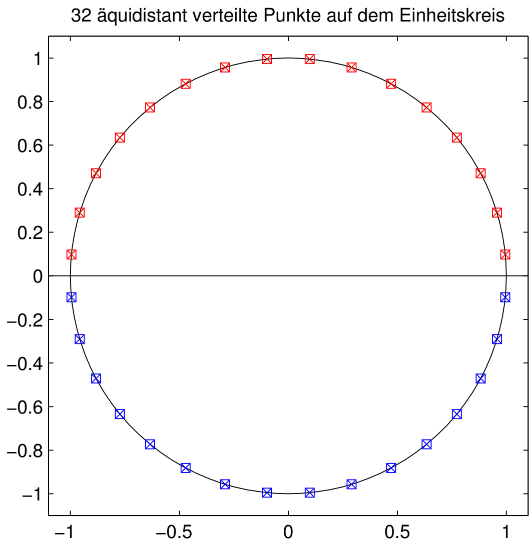
Äquidistante Stützstellen sind zwar eine naheliegende Wahl, jedoch erhält man auf diese Weise in den meisten Fällen keine „gute“ Approximation an die gegebene Funktion. Wir werden nun Stützstellen kennenlernen, welche Interpolationspolynome liefern, welche die Funktion wesentlich besser approximieren.

3.3.1 Tschebyschow-Punkte

Zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ erhählt man die *Tschebyschow*[3]*-Punkte*, indem man zuerst $n \in \mathbb{N}$ Punkte äquidistant auf der oberen Hälfte des Einheitskreises verteilt und diese anschließend auf die x-Achse projeziert.

Der Umfang des Einheitskreises ist 2π, daher sollen n Punkte auf das Intervall $[0, \pi]$ äquidistant verteilt werden. Wir wählen die Stützstellen

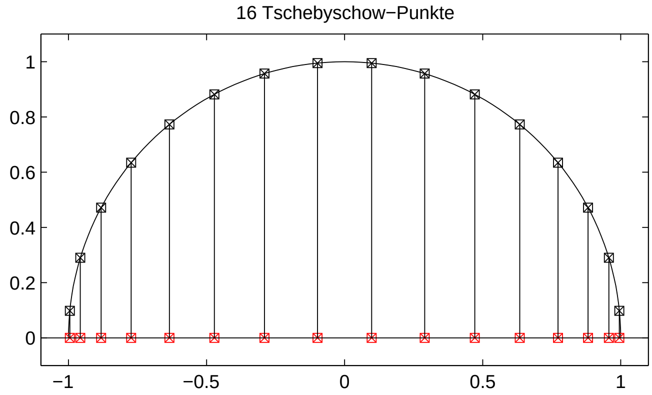
$$z_k = \frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$



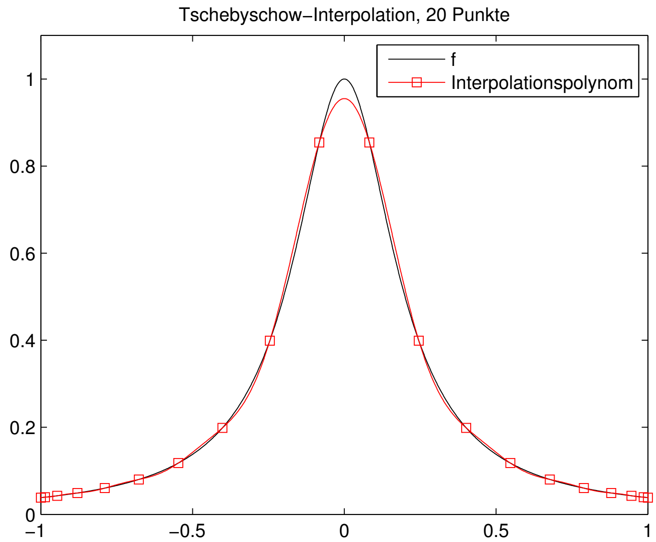
Die Tschebyschow-Punkte sind dann gegeben durch

$$x_k = \cos z_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

[3] *Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow*, 1821–1894, russischer Mathematiker



Berechnen wir nun das Interpolationspolynom in den Tschebyschow-Punkten, erhalten wir ein deutlich besseres Resultat.



3.4 Fehler der Polynominterpolation

Wir gehen nun davon aus, dass die Werte der zu approximierenden Funktion

$$f\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}$$

in den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ gegeben sind, d.h. es liegen die $n+1$ Interpolationspunkte

$$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

vor. Es bezeichne P_n das Interpolationspolynom durch diese Punkte, von welchem wir annehmen, dass wir es mit der Newtonschen Interpolationsformel berechnet haben. Das Interpolationspolynom P_n ist dann also in der Form

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

gegeben, wobei die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$ gerade die dividierten Differenzen sind.

Wir wollen nun eine Schranke für den Fehler der Polynominterpolation finden, also eine Konstante $C > 0$, sodass

$$|f(x) - P_n(x)| \le C \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

Als Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma.

LEMMA 3.8 (Wert des Leitkoeffizienten) Ist f n-mal stetig differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in [-1, 1]$ mit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,.$$

Beweis. Da P_n die Funktion f im Intervall $[-1, 1]$ an $n + 1$ Stellen interpoliert, besitzt $f - P_n$ mindestens $n + 1$ Nullstellen in diesem Intervall. Nach dem *Satz von Rolle*[4] („zwischen je zwei Nullstellen liegt mindestens eine Nullstelle der Ableitung“) hat daher $f' - P_n'$ mindestens n Nullstellen und induktiv schließen wir somit, dass $f^{(n)} - P_n^{(n)}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Daher gibt es ein $\xi \in [-1, 1]$ mit

$$f^{(n)}(\xi) = P_n^{(n)}(\xi)\,.$$

Aus

$$P_n(x) = c_n x^n + \ldots$$

folgt

$$P_n^{(n)}(x) = n!\, c_n$$

und somit die Aussage des Lemmas. □

Nun können wir den Interpolationsfehler bestimmen.

SATZ 3.9 (Interpolationsfehler) Es sei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gibt es für alle $x \in [-1, 1]$ ein $\xi \in [-1, 1]$ mit

$$f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}\,. \tag{3.5}$$

[4] *Michel Rolle*, 1652–1719, französischer Mathematiker

Beweis. Es sei $x \neq x_k$ für alle $k = 0, \ldots, n$, da Gleichung (3.5) offensichtlich für $x = x_k$ erfüllt ist. Wir nehmen nun $x_{n+1} = x$ als weitere Stützstelle hinzu. Dann ist das Interpolationspolynom P_{n+1} durch die $n+2$ Interpolationspunkte

$$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{n+1}, f(x_{n+1}))$$

gegeben durch

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + c_{n+1}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \tag{3.6}$$

wobei c_{n+1} die $n+1$ dividierte Differenz bezeichnet. Aus dem soeben bewiesenen Lemma folgt

$$c_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

und damit die Aussage, da $x = x_{n+1}$. □

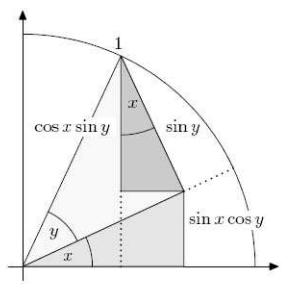
Aufgrund des obigen Satzes nennt man

$$\Pi(x) := |(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)|$$

den *Verfahrensfehler* der Polynominterpolation.

3.5 Tschebyschow-Polynome

Um zu verstehen, warum die Interpolation mittels der Tschebyschow-Punkte besonders gut funktioniert, studieren wir mithilfe der *Tschebyschow-Polynome* den Verfahrensfehler der Polynominterpolation mit Tschebyschow-Stützstellen. Dazu erinnern wir uns zunächst an die *Additionstheoreme* der trigonometrischen Funktionen.



$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{3.7}$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3.8}$$

Wir ersetzen darin b durch $-b$ und erhalten unter Verwendung von $\cos(-b) = \cos(b)$ und $\sin(-b) = -\sin(b)$:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \tag{3.9}$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{3.10}$$

Durch Addition von (3.8) und (3.10) erhalten wir die uns hier besonders interessierende Formel

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b. \tag{3.11}$$

Speziell erhalten wir aus (3.11):

$$b = a: \quad \cos(2a) = 2\cos^2 a - \cos 0 = 2\cos^2 a - 1 \tag{3.12}$$

$$b = 2a: \quad \cos(3a) = 2\cos a\cos(2a) - \cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a \tag{3.13}$$

$$b = 3a: \quad \cos(4a) = 2\cos a\cos(3a) - \cos(2a) = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 \tag{3.14}$$

Wir beobachten, dass sich $\cos(na)$ stets als Polynom in $\cos(a)$ ausdrücken lässt. (Beachte, dass zum Beispiel $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ und dass sich dies weder polynomial in $\cos a$ noch in $\sin a$ schreiben lässt.) Mithilfe der Formel

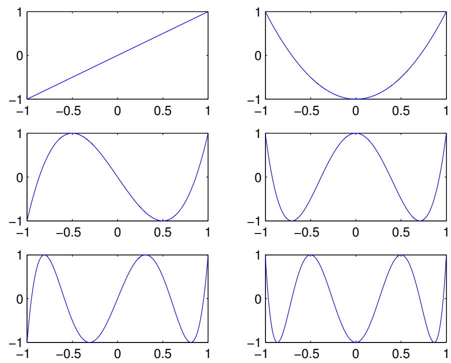
$$\cos((n+1)a) = 2\cos a\cos(na) - \cos((n-1)a), \tag{3.15}$$

die wir durch Einsetzen von $b = na$ in (3.11) erhalten, sehen wir induktiv, dass dies tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SATZ 3.10 Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ lässt sich $\cos(na)$ als Polynom in $\cos a$ ausdrücken. Es gilt also

$$\cos(na) = T_n(\cos a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

für ein gewisses Polynom T_n.



Dieses Polynom T_n heißt n–tes Tschebyschow-Polynom. Aufgrund obiger Rechnungen wissen wir $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

SATZ 3.11 (Eigenschaften der Tschebyschow-Polynome)

Die Tschebyschow-Polynome T_n haben folgende Eigenschaften:

(1) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(2) T_n ist ein Polynom vom Grad n.

(3) Für $-1 \le x \le 1$ gilt $-1 \le T_n(x) \le 1$.

(4) T_n enthält nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

(5) T_n hat ganzzahlige Koeffizienten. Der Leitkoeffizient ist 2^{n-1} für $n \in \mathbb{N}$.

(6) Es gilt $T_n\left(\cos(\frac{k\pi}{n})\right) = (-1)^k$ für $k = 0, \ldots, n$.

(7) T_n hat n reelle Nullstellen in $[-1, 1]$, nämlich $\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ für $k = 1, \ldots, n$.

Beweis. (1) Formel (3.15) besagt $T_{n+1}(\cos a) = 2\cos a \cdot T_n(\cos a) - T_{n-1}(\cos a)$. Daraus folgt $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ zunächst für $-1 \leq x \leq 1$ und somit für $x \in \mathbb{R}$.

(2) Folgt induktiv aus (1).

(3) Jedes $x \in [-1, 1]$ lässt sich schreiben als $x = \cos a$. Damit folgt $T_n(x) = \cos(na) \in [-1, 1]$.

(4) Folgt induktiv aus (1).

(5) Folgt induktiv aus (1).

(6) $T_n\left(\cos(\frac{k\pi}{n})\right) = \cos(n \cdot \frac{k\pi}{n}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

(7) $T_n\left(\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)\right) = \cos(\frac{2k-1}{2}\pi) = 0$. □

SATZ 3.12 Es sei q ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, also

$$q(x) = x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_1 x + q_0 \quad \text{mit } q_0, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Gleichheit gilt genau für $q = \frac{T_n}{2^{n-1}}$.

Beweis. Wir nehmen an, dass

$$c := \max_{-1 \leq x \leq 1} |2^{n-1} q(x)| \leq 1$$

und betrachten das Polynom $w(x) := 2^{n-1}q(x) - T_n(x)$ vom Grad kleiner gleich $n-1$. Für $t_k := \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ gilt

$$w(t_k) = 2^{n-1}q(t_k) - (-1)^k.$$

Daraus folgt für gerade k, dass

$$w(t_k) = 2^{n-1}q(t_k) - 1 \leq c - 1 \leq 0.$$

Analog gilt für ungerade k, dass

$$w(t_k) = 2^{n-1}q(t_k) + 1 \geq -c + 1 \geq 0.$$

Somit muss das Polynom w in jedem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ für $k = 0, \ldots, n-1$ (mindestens) eine Nullstelle haben. Falls $w(t_k) = 0$ für $k = 1, \ldots, n-1$ gilt, so ist $2^{n-1}q(t_k) = T_n(t_k) = (-1)^k$ und da die Werte von $2^{n-1}q(x)$ und von $T_n(x)$ das Intervall $[-1, 1]$ in der Nähe von $x = t_k$ nicht verlassen können, muss t_k eine doppelte Nullstelle sowohl von $T_n(x) - (-1)^k$ als auch von $2^{n-1}q(x) - (-1)^k$ sein. Daher ist dann t_k auch (mindestens) doppelte Nullstelle von $T_n - 2^{n-1}q = w$. Somit hat w insgesamt mindestens n Nullstellen, das heißt es müsste $w = 0$ gelten. Daraus folgt aber $2^{n-1}q(x) = T_n(x)$ und somit $c = \max\limits_{-1\le x\le 1} |T_n(x)| = 1$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wir untersuchen nun den größtmöglichen Verfahrensfehler, der bei der Auswertung an einer Stelle $x \in [-1, 1]$ auftreten kann, also

$$\max_{-1\le x\le 1} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|,$$

in Abhängigkeit von den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ im Intervall $[-1, 1]$.

SATZ 3.13 Der maximale Verfahrensfehler

$$\max_{-1\le x\le 1} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|$$

wird am kleinsten, wenn x_0, x_1, $\dots x_n$ die Nullstellen von T_{n+1} sind.

Beweis. Das Polynom $(x - x_0) \dots (x - x_n)$ ist normiert und vom Grad $n + 1$, die Behauptung folgt daher aus Satz 3.12. Der maximale Verfahrensfehler ist dann $1/2^n$. □

ÜBUNGSAUFGABEN

(3.1) *Vandermondematrix.* Zeigen Sie, dass für paarweise verschiedenen Stützstellen die bei der Interpolationsmatrix auftretende Vandermondematrix invertierbar ist. Welche Konsequenz hat dieser Sachverhalt für die Polynominterpolaton durch diese Punkte?

(3.2) *Quadraturfehler.* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir approximieren das Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{durch} \quad \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wählen wir Stützstellen in $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = (b - a) \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \text{(Quadraturformel)}$$

mit Gewichten $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$.

(a) Wie lassen sich die Gewichte w_i als Integrale ausdrücken?
Hinweis. Lagrange-Interpolationsformel

(b) Zeigen Sie für den Quadraturfehler err $:= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x$, dass

$$|\,\mathrm{err}\,| \le \frac{\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \int_a^b \Pi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3.3) *Rechte Randpunktregel.* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und f eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Geben Sie für das Interpolationspolynom P_0 zum Interpolationspunkt $(b, f(b))$ die zugehörige Quadraturformel an. Bestimmen Sie anschließend den Verfahrensfehler dieser Quadraturformel.

(3.4) *Mittelpunktsregel.* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und f eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Geben Sie für das Interpolationspolynom P_0 zum Interpolationspunkt $\big(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\big)$ die zugehörige Quadraturformel an. Bestimmen Sie anschließend den Verfahrensfehler dieser Quadraturformel.

(3.5) *Trapezregel.* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Wählen Sie als Stützstellen a und b ($n = 1$) und bestimmen Sie die zugehörige Quadraturformel. Geben Sie eine Abschätzung für den Quadraturfehler der Trapezregel an.

(3.6) *Simpson-Regel.* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Wählen Sie als Stützstellen a, $\frac{a+b}{2}$ und b ($n = 2$) und bestimmen Sie die zugehörige Quadraturformel. Geben Sie eine Abschätzung für den Quadraturfehler der Simpson-Regel an.

(3.7) *Tschebyschow-Polynome.* Zeigen Sie, dass für Tschebyschow-Polynome die Formel

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \ge m\colon T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$$

gilt. Zeigen Sie anschließend (oder direkt), dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi\,, & n = m = 0\,,\\ \pi/2\,, & n = m > 0\,,\\ 0\,, & n \ne m\,. \end{cases}$$

(3.8) *Abschätzung für Tschebyschow-Punkte.* Es seien $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1, 1]; \mathbb{R})$ und $x_0, \dots, x_n$ die Nullstellen von T_{n+1} (Tschebyschow-Punkte). Geben Sie eine Abschätzung für den Quadraturfehler der zugehörigen Quadraturformel an. Benützen Sie dabei die Abschätzung für den maximalen Verfahrensfehler.

(3.9) *Numerisches Differenzieren und Polynominterpolation.* Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir approximieren die Ableitung von f an der Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ durch

$$f'(\xi) \approx P_n'(\xi).$$

Es sei $h > 0$. Bestimmen Sie die resultierende Approximation für $f'(\xi)$ für

(a) $n = 1$, $x_0 = \xi$ und $x_1 = \xi + h$.

(b) $n = 2$, $x_0 = \xi - h$, $x_1 = \xi$ und $x_2 = \xi + h$.

(3.10) *Hermite-Interpolation.* Wir möchten nun nicht nur die Funktionswerte, sondern auch die Werte der Ableitungsfunktion approximieren. Wir betrachten daher eine differenzierbare Funktion f und suchen für zwei Stützstellen x_0, x_1 ein Interpolationspolynom P vom Grad 3 mit

$$P(x_0) = f(x_0)\,, \quad P'(x_0) = f'(x_0)\,, \quad P(x_1) = f(x_1)\,, \quad P'(x_1) = f'(x_1)\,.$$

Wir betachten dazu die folgenden dividierten Differenzen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_0 & f(x_0) & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_0+\varepsilon & f(x_0+\varepsilon) & \to & \dots & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_1-\varepsilon & f(x_1-\varepsilon) & \to & \dots & \to & \dots & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_1 & f(x_1) & \to & \dots & \to & \dots & \to & \dots
\end{array}$$

Füllen Sie das Tableau vollständig aus und bestimmen Sie dann den Grenzwert der Einträge für $\varepsilon \to 0$. Erfüllt das entsprechende Newton Interpolationspolynom die Anforderungen?

Teil II

Übungsteil

Kapitel 4
Präliminarien

Betrag einer reellen Zahl

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

der *Betrag* von x.

Quadratische Gleichungen

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$x^2 + px + q = 0. \tag{4.1}$$

Man nennt $D := p^2 - 4q$ die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (4.1). Es können die folgenden drei Fälle auftreten:

▷ $\mathbf{D = 0}$: Gleichung (4.1) besitzt eine reelle (doppelte) Lösung, nämlich

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}.$$

▷ $\mathbf{D > 0}$: (4.1) hat zwei, voneinander verschiedene, reelle Lösungen. Diese lauten

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

▷ $\mathbf{D < 0}$: Es existiert keine reelle Lösung der Gleichung (4.1).

Im Falle, dass $D \geq 0$, gilt weiters

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q, \qquad \text{(\textit{Zerlegung in Linearfaktoren})}$$
$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q. \qquad \text{(\textit{Satz von Vieta})}$$

Beweis: (a) Quadratisches Ergänzen von (4.1) führt auf

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0 \iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Da $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$, besitzt die Gleichung nur dann eine reelle Lösung, falls die rechte Seite ebenfalls größer gleich Null ist. Sei also $D \geq 0$, so kann auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel gezogen werden. Somit erhält man

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \iff x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

(b) Setzen wir für x_1 und x_2 ein, so ergibt sich

$$x_1+x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-p.$$

Genauso einfach sieht man, dass

$$x_1\cdot x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.$$

(c) Nun folgt unmittelbar

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q.$$

4.1 Aufgaben

Berechne die Lösungsmenge durch quadratisches Ergänzen:

(1) $x^2-2x+1=0$ (2) $x^2-2x+2=0$ (3) $x^2+x-6=0$

(4) $x^2-4x+3=0$ (5) $x^2-3x+\frac{9}{4}=0$ (6) $4x^2-8x+3=0$

Kapitel 5
Trigonometrische Funktionen

5.1 Grundlegendes

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und Folgerungen

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$
- $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$

Periodizität und Parität

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ (sin *und* cos *sind* 2π*-periodisch*)
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (sin *ist eine ungerade Funktion*)
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (cos *ist eine gerade Funktion*)

Spezielle Phasenverschiebungen

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

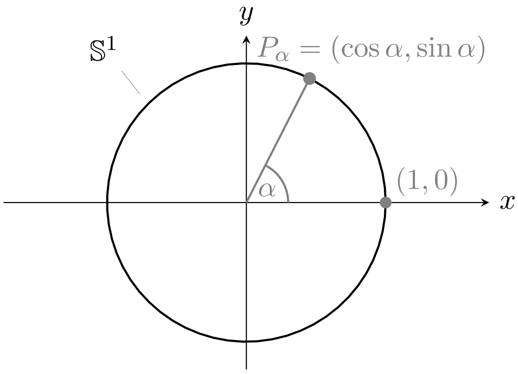


Abbildung 5.1 Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

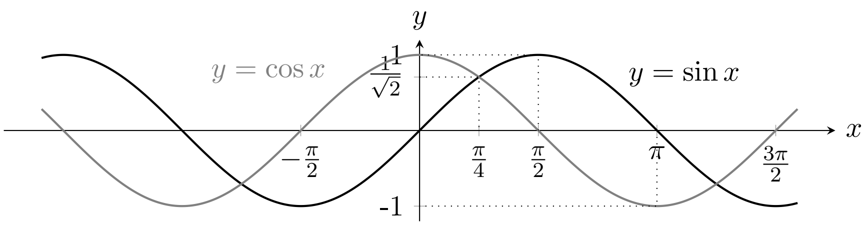


Abbildung 5.2 Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion

Definition von Tangens und Cotangens

Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

Additionstheoreme für Tangens und Cotangens

- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha \pm \tan\beta}$

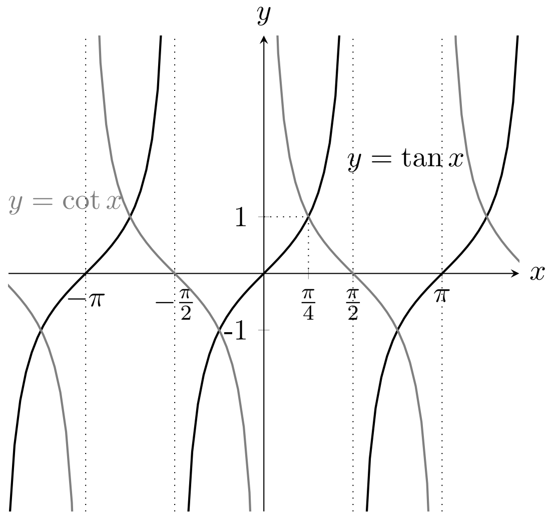


Abbildung 5.3 Funktionsgraphen des Tangens und des Cotangens

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/
$\cot\alpha$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Tabelle 5.1 Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen

5.2 Beispiele

Beispiel 5.1 Man zeige

$$\cos^2(5\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=1.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= [\cos\ \text{ist}\ 2\pi\text{-periodisch}] = \cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = [\cos(\beta+\pi) = -\cos\beta] = \\ &= \cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta\right] = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = \\ &= [\text{Pythagoras}] = 1 = \text{RHS}\end{aligned}$$

Bemerkung: LHS steht für *left-hand side*, RHS für *right-hand side*, also für die linke bzw. rechte Seite der Gleichung.

Beispiel 5.2 Bestimme die Definitionsmenge folgender trigonometrischer Gleichung und verifiziere diese:

$$\frac{\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{LHS} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \text{RHS}$$

Beispiel 5.3 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha. \quad (*)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (*) &\iff 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha \iff \sin\alpha = 0 \lor \cos\alpha = 1 \iff \\ &\iff \alpha = k\pi \lor \alpha = 2k\pi \iff \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$

Beispiel 5.4 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin\alpha = \cot\frac{\alpha}{2}. \quad (*)$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} (*) &\iff 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \iff \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \lor \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \lor \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ &\iff \alpha = (2k+1)\pi \lor \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \lor \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2k+1)\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$

Beispiel 5.5 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos^2\alpha + 3 = \sin^2\alpha + 5\cos\alpha.$$

Lösung: Verwendung der Identität $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ liefert

$$\begin{aligned} 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0 &\iff (\cos\alpha - 2)\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \\ &\iff \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \lor \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

da $|\cos\alpha| \leq 1$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Somit ist $\mathbb{L} = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}$.

5.3 Aufgaben

Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

(1) $\cos\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sin\vartheta = -0.5$ (3) $\tan\vartheta = -\sqrt{3}$

(4) $\sin(2\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5) $\sin^2\vartheta - 1 = -0.75$ (6) $4\sin^2\vartheta + 3\cos\vartheta = \frac{9}{2}$

Man bestimme den Definitionsbereich folgender Gleichungen und verifiziere diese:

(7) $2\sin^2\alpha = 1 - \cos(2\alpha)$ (8) $2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$

(9) $\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ (10) $\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

(11) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ (12) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge folgender trigonometrischer Gleichungen:

(13) $|\cos\alpha| = \frac{1}{2}$ (14) $2\sin(2\alpha)\tan\alpha = 3$

(15) $\sin\alpha + 2\cot\alpha = \frac{2}{\sin\alpha}$ (16) $2\cos^2\alpha + (1+\sqrt{3})\sin\alpha = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

KAPITEL 6
Exponential- und Logarithmusfunktionen

6.1 Grundlegendes

Für $a > 0$ nennt man

$$\mathbb{R} \to (0, \infty)\colon x \mapsto a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a. Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen.

Für $a \neq 1$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \log_a(x)$$

heißt *Logarithmusfunktion* zur Basis a. Zur Basis e bzw. 10 schreibt man

$$\ln := \log := \log_{\mathrm{e}} \ \ (\textit{Logarithmus naturalis}) \qquad \text{und} \qquad \lg := \log_{10}\,.$$

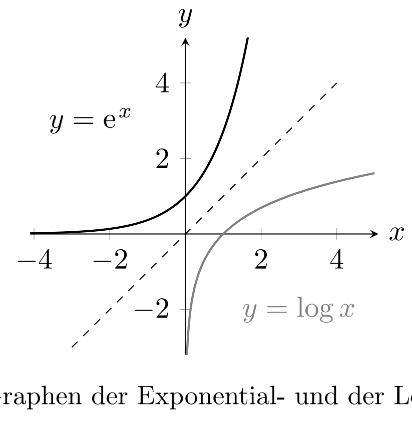


ABBILDUNG 6.1 Graphen der Exponential- und der Logarithmusfunktion

Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Seien $a > 0$ mit $a \neq 1$, $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

6.2 Beispiele

Beispiel 6.1 (*Umrechnen von Logarithmen*)
Es seien $a, b > 0$ mit $a \neq 1 \neq b$ und $x > 0$. Unter Verwendung der Identität $x = b^{\log_b x}$ erhält man

$$\log_a x = \log_a \left(b^{\log_b x}\right) = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Logarithmusfunktionen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich also nur durch eine multiplikative Konstante.

Beispiel 6.2 Es seien $a > 0$ mit $a \neq 1$ und $x \cdot y > 0$. Bei der Verwendung der Logarithmusregeln ist Vorsicht geboten:

$$\log_a(xy) = \log_a |xy| = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a |x| + \log_a |y|$$

Beispiel 6.3 Vereinfache $\sqrt[3]{\mathrm{e}}^{\,6\ln 2}$.

Lösung: $\sqrt[3]{\mathrm{e}}^{\,6\ln 2} = \mathrm{e}^{\frac{6}{3}\ln 2} = \mathrm{e}^{2\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 4} = 4$

Beispiel 6.4 Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache anschließend soweit wie möglich:

$$\log \frac{x^3}{y^2}.$$

Lösung: Der Ausdruck $\frac{x^3}{y^2}$ ist für $y \neq 0$ definiert. Damit auch $\log \frac{x^3}{y^2}$ wohldefiniert ist, muss verlangt werden, dass $\frac{x^3}{y^2} > 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x > 0$ ist. Somit ergibt sich für den Gültigkeitsbereich: $x > 0, y \neq 0$. Vereinfachen:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \log x^3 - \log y^2 = 3 \log x - 2 \log |y|$$

BEISPIEL 6.5 (Exponentialgleichungen)

(1) Bestimme die Lösungsmenge der Exponentialgleichung

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Lösung:

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \iff (3^x + 1)(3^x - 3) = 0 \iff x = 1,$$

da $\{x \in \mathbb{R} \colon 3^x = -1\} = \emptyset$. Daher ist $\mathbb{L} = \{1\}$.

(2) Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$x^{2x} = x.$$

Lösung: $\mathbb{D} = (0, \infty)$

$$x^{2x} = x \overset{x>0}{\iff} 2x \log x = \log x \iff x \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{L}$$

BEISPIEL 6.6 (Logarithmische Gleichung)
Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\log(2x + 2) + \log(3x - 4) = \log(4x^2 - 4)$$

Lösung: $2x + 2 > 0 \iff x > -1$, $3x - 4 > 0 \iff x > \frac{4}{3}$, $4x^2 - 4 > 0 \iff |x| > 1$
$\Rightarrow \mathbb{D} = \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

$$\log(2x + 2) + \log(3x - 4) = \log(2x + 2) + \log(2x - 2) \iff$$
$$\log(3x - 4) = \log(2x - 2) \iff 3x - 4 = 2x - 2 \iff x = 2$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$

6.3 AUFGABEN

Vereinfache:

(1) $\sqrt[5]{10}^{\,2 \lg 32}$ (2) $\sqrt{\mathrm{e}}^{\,\frac{2}{3} \ln 3}$

Bestimme den Gültigkeitsbereich von x, y und vereinfache:

(3) $\log_3 \dfrac{9x^4}{y^6}$ (4) $\ln \sqrt{x^2 - y}$

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

(5) $3^{x-1} = 10$

(6) $\lg(x-2) = 1$

(7) $a\left(a^{x-3}\right)^{x+2} = a^{3x+5}\left(a^x\right)^{x-6}$ für $a \in (0, \infty)$

(8) $4^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}} + 1 = 0$

(9) $\log(x^3(x-1)) + 3\log\dfrac{1}{x} = \log(2-x)$

(10) $\dfrac{2}{\lg x + 2} - \dfrac{3}{\lg x - 4} = 2$

Kapitel 7

Differentialrechnung

7.1 Grundlegendes

Differentiationsregeln

Es seien f und g differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $(f + \lambda \cdot g)' = f' + \lambda \cdot g'$ (*Linearität*)
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (*Produktregel*)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (*Quotientenregel*)
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ (*Kettenregel*)

(Die Quotientenregel gilt natürlich nur für Argumente x mit $g(x) \neq 0$ und für die Kettenregel muss die Hintereinanderausführung existiert.)

Ableitung elementarer Funktionen

Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\lambda = \lambda \cdot x^{\lambda-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \frac{1}{x}$

7.2 Beispiele

Beispiel 7.1 (*Produktregel*)
Differenziere

$$\left[z \mapsto f(z) = z^2 \mathrm{e}^z \sin z\right].$$

Lösung: Anwendung der Produktregel liefert

$$f'(z) = 2z\mathrm{e}^z \sin z + f(z) + z^2\mathrm{e}^z \cos z = z\mathrm{e}^z((2+z)\sin z + z\cos z).$$

BEISPIEL 7.2 (*Quotientenregel*)
Berechne die Ableitung von der Tangensfunktion.

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = [\text{Quotientenregel}] = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

BEISPIEL 7.3 (*Kettenregel*)
Differenziere

$$\left[y \mapsto g(y) = \sin \mathrm{e}^{\tan y^5}\right].$$

Lösung: Durch dreimaliges Anwenden der Kettenregel erhalten wir

$$g'(y) = \cos\left(\mathrm{e}^{\tan y^5}\right) \cdot \mathrm{e}^{\tan y^5} \cdot (1 + \tan^2 y^5) \cdot 5y^4.$$

7.3 AUFGABEN

Bestimme jeweils die Ableitung der angegebenen Funktion. (Es braucht nicht untersucht zu werden, wo die Funktionen definiert bzw. differenzierbar sind.)

(1)	$[k \mapsto f_1(k) = 4k^x]$, $x \neq 0$	(2)	$\left[z \mapsto f_2(z) = \sin^2 z\right]$
(3)	$[x \mapsto f_3(x) = \tan x]$	(4)	$\left[x \mapsto f_4(x) = x^3\mathrm{e}^x \tan x\right]$
(5)	$\left[x \mapsto f_5(x) = \sqrt[n]{x}\right]$, $n \in \mathbb{N}$	(6)	$[a \mapsto f_6(a) = \cot a]$
(7)	$\left[x \mapsto f_7(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\right]$	(8)	$\left[b \mapsto f_8(b) = \dfrac{\sqrt{b}}{\sin^4 b}\right]$
(9)	$\left[a \mapsto f_9(a) = \sqrt{\sin a}\right]$	(10)	$\left[c \mapsto g_1(c) = \dfrac{\cos c^2 + c^3}{\mathrm{e}^{\sin c - 2c^3}}\right]$
(11)	$[x \mapsto g_2(x) = a^x]$, $a > 0$	(12)	$\left[z \mapsto g_3(z) = (\sin z)^{\cos z}\right]$
(13)	$\left[x \mapsto g_4(x) = \dfrac{\log x}{x^2 + \sin x}\right]$	(14)	$\left[x \mapsto g_5(x) = (\sin x + \mathrm{e}^{x^3}\cos x)(\log x)^2\right]$

Kapitel 8

Integralrechnung

8.1 Grundlegendes

Im Folgenden steht c für eine reelle Konstante.

Integrationsregeln

Es seien f_L und g_L integrierbar und f und g stetig differenzierbar sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ▷ $$\int \Big(f_L(x) + \lambda \cdot g_L(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f_L(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int g_L(x)\,\mathrm{d}x$$ (*Linearität*)
- ▷ $$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(z)\,\mathrm{d}z\Big|_{z=g(x)}$$ (*Substitutionsregel*)
- ▷ $$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$ (*Partielle Integration*)

Stammfunktionen elementarer Funktionen

Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- ▷ $$\int x^\lambda\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$$
- ▷ $$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$
- ▷ $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$$
- ▷ $$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$
- ▷ $$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

8.2 Beispiele

Beispiel 8.1 (*Substitution*)

(1) Berechne $\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x$.
Lösung:

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 = u, 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\right] = \frac{1}{3}\int \sin u\ \mathrm{d}u = \\ = -\frac{1}{3}\cos u + c = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$$

(2) Berechne $\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.
Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left[\tan x = z, \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}z\right] = \int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z + c = \mathrm{e}^{\tan x} + c$$

(3) Berechne $\int_1^{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \frac{\sqrt{4\ln x + 1}}{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lösung:

$$\int_1^{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \frac{\sqrt{4\ln x + 1}}{2x}\,\mathrm{d}x = \left[u = 4\ln x + 1,\ \mathrm{d}u = \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \\ = \frac{1}{8}\int_1^2 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{12}\ \sqrt{u^3}\Big|_{u=1}^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{12}$$

Beispiel 8.2 (*Partielle Integration*)

(1) Berechne $\int z\mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z$.

Lösung:

$$\int z\mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z = [\text{partielle Integration}] = z\mathrm{e}^z - \int \mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z = \mathrm{e}^z(z-1) + c$$

(2) Berechne $\int \ln|x|\ \mathrm{d}x$.

Lösung:

$$\int 1 \cdot \ln|x|\,\mathrm{d}x = [\text{partiell}] = x\ln|x| - \int \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x(\ln|x| - 1) + c$$

(3) Berechne $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

Lösung: Partielle Integration liefert

$$-\frac{1}{x}\ln x\Big|_{x=1}^{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

8.3 AUFGABEN

Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\ \mathrm{d}y$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\ \mathrm{d}t$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{2a}{a^2+3}\ \mathrm{d}a$

(6) $\displaystyle\int \tan b\ \mathrm{d}b$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} u^2\cos(3u)\ \mathrm{d}u$

(8) $\displaystyle\int \ln(1+w^2)\ \mathrm{d}w$

(9) $\displaystyle\int \frac{\sin(2z)-\sin z}{\sqrt{\sin^2 z+\cos z}}\ \mathrm{d}z$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{9^x+1}\ \mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\ \mathrm{d}x$