Brückenkurs Informatik

Simon Haller **Georg Moser** Justus Piater

Inhalte der Lehrveranstaltung

Grundkonzepte

Definition, Satz, Beweis, Beweismethoden

Mengen, Relationen und Funktionen

Beweise mit Mengen

Vollständige Induktion

Beispiele

Matrizen

Einheitsmatrix, Matrixoperationen

Summen und Reihen

endliche Summen, unendliche Reihen

Funktionen

Definition

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung oder Funktion von M nach N ist eine Vorschrift, die genau jedem $m \in M$ genau ein $n \in N$ zuordnet. Wir schreiben

$$f: M \to N, m \mapsto f(m),$$

wenn f eine Abbildung von M nach N ist, und nennen M den Definitionsbereich und N den Bildbereich.

Beispiel

Sei P die Menge aller Produkte einer Firma. Dann ist $f: P \to \mathbb{N}$, wobei $p \mapsto f(p)$ eine Abbildung, die in der Praxis Preis genannt wird.

Wenn $f: M \to N$ eine Abbildung ist, dann hat jedes $m \in M$ genau ein Bild, für ein $n \in N$ kann es aber beliebig viele (auch kein) Urbild geben.

Beispiel

Sei

$$f: \{0,1,2\} \to \{a,b,c\}, 0 \mapsto b, 1 \mapsto b, 2 \mapsto a$$

eine Abbildung.

- Der Definitionsbereich von f ist $\{0,1,2\}$.
- Der Bildbereich ist $\{a,b,c\}$, das Bild ist $\{a,b\}$. Das Bild von 2 ist a.
- Das Element b hat die Urbilder 0 und 1. Das Element c hat kein Urbild.

Beispiel

Sei

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine Abbildung. Das Bild von 0 ist 0, das Bild von 1 ist -1, das Bild von 2 ist 1.

Eine Abbildung $f\colon \{1, \dots, k\} \to A$, $i \mapsto f(i)$ wird oft auch als $(f(1), f(2), \dots, f(k))$ geschrieben und heißt dann ein k-Tupel. Für $k = 2$ bzw. $k = 3$ nennt man ein k-Tupel auch Paar bzw. Tripel.

Beispiel

Das Paar (a, b) entspricht der Abbildung $\{1, 2\} \to \{a, b\}, 1 \mapsto a, 2 \mapsto b$. Das Paar (b, b) entspricht der Abbildung $\{1, 2\} \to \{a, b\}, 1 \mapsto b, 2 \mapsto b$.

Definition (Kartesisches Produkt)

Seien A und B Mengen. Dann heißt $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ das *kartesische Produkt* von A und B.

Beispiel

Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$ ist

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$

aber

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Relationen

Definition

$R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M; R heißt

- reflexiv, wenn für alle $x \in M$, $(x, x) \in R$
- irreflexiv, wenn für kein $x \in M$, $(x, x) \in R$
- symmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- antisymmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- transitiv, wenn für alle $x, y, z \in M$ $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Beispiel

- $R_1 := \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ auf $\{0, 1, 2\}$
- $R_2 := \varnothing$ auf $\{0\}$
- $R_3 := \{(0, 0), (2, 1)\}$ auf $\{0, 1, 2\}$
- $R_4 := \{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ auf $\{0, 1, 2\}$
- $R_5 := \varnothing$ auf $\varnothing$

	reflexiv	irreflexiv	symmetrisch	antisymmetrisch	transitiv
R_1	✓	×	✓	✓	✓
R_2	×	✓	✓	✓	✓
R_3	×	×	×	✓	✓
R_4	×	×	✓	×	×
R_5	✓	✓	✓	✓	✓

Definition

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-Matrix A über R ist eine Abbildung $A\colon \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to R$, $(i, j) \mapsto A(i, j)$. Wir schreiben $A(i, j)$ oft als A_{ij}.

Im Folgenden betrachten wir Matrizen über ganzen Zahlen, das heißt $R = \mathbb{Z}$

Notation

Wir schreiben Matrizen als zweidimensionale Felder. Die 2×3-Matrix $A\colon \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$, $(1, 1) \mapsto 1$, $(1, 2) \mapsto 2$, $(1, 3) \mapsto 3$, $(2, 1) \mapsto 4$, $(2, 2) \mapsto 5$, $(2, 3) \mapsto 6$ entspricht dann

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Für eine $m \times n$-Matrix nennen wir $m \times n$ die Dimension, m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten der Matrix.

Matrizenoperationen

Definition (Matrizenaddition)

Seien A und B zwei $m \times n$-Matrizen. Die Summe von A und B ist definiert wie folgt: $S := A + B$, wobei $S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$; die Addition ist also komponentenweise.

Example

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition (Matrizenmultiplikation)

Sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Das Produkt P von A und B ist eine $m \times p$-Matrix und definiert wie folgt: $P := A \cdot B$, wobei $P_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ik} B_{kj}$.

Example

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 15 \\ 68 & 39 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 30 \\ 10 & 17 & 24 \\ 17 & 25 & 33 \end{pmatrix}$$

ist die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ.