7. *Lösung.* Diese Formel ist eine Tautologie. Dies kann mit der *Methode von Quine* wie folgt gezeigt werden.

Betrachten wir zuerst die Zuweisung $\{E \to \mathsf{True}\}$.

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg E) \to (\neg(C \wedge D) \wedge E)$$

$$\{E \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg \mathsf{True}) \to (\neg(C \wedge D) \wedge \mathsf{True})$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D) \to \neg(C \wedge D)$$

$$\{C \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg(\mathsf{False} \wedge D) \to \neg(\mathsf{False} \wedge D)$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{C \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg(\mathsf{True} \wedge D) \to \neg(\mathsf{True} \wedge D)$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg D \to \neg D$$

$$\{D \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg \mathsf{True} \to \neg \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{D \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg \mathsf{False} \to \neg \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

Dann zeigen wir noch die Zuweisung $\{E \to \mathsf{False}\}$.

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg E) \to (\neg(C \wedge D) \wedge E)$$

$$\{E \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg \mathsf{False}) \to (\neg(C \wedge D) \wedge \mathsf{False})$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

Da an allen Blättern des Baumes True erreicht wird, ist die Formel eine Tautologie.

□

8. *Lösung.* a) Informell zeigen wir die Aussage indem wir zuerst die erste und dann die zweite Gleichung einsetzten:

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{a}), z) \approx \mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{f}(\mathsf{a}, z)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{b}, z)$$

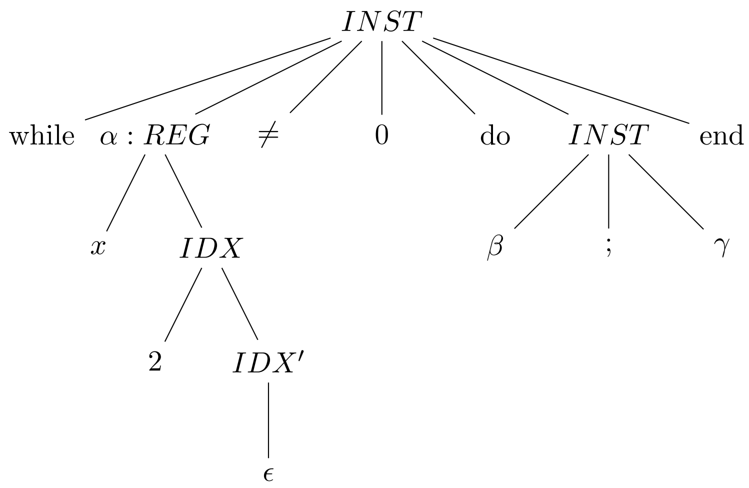
b) Wir zeigen die Aussage mit dem folgendem Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z)\approx\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z))\in E}{E\vdash\mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z)\approx\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z))}\,\text{(a)}}{E\vdash\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}),z)\approx\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{a},z))}\,\text{(i, }\sigma\text{)}\qquad\dfrac{\dfrac{}{E\vdash\mathsf{b}\approx\mathsf{b}}\,\text{(r)}\quad\dfrac{\mathsf{f}(\mathsf{a},z)\approx z\in E}{E\vdash\mathsf{f}(\mathsf{a},z)\approx z}\,\text{(a)}}{E\vdash\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{a},z))\approx\mathsf{f}(\mathsf{b},z)}\,\text{(k)}}{E\vdash\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}),z)\approx\mathsf{f}(\mathsf{b},z))}\,\text{(t)}$$

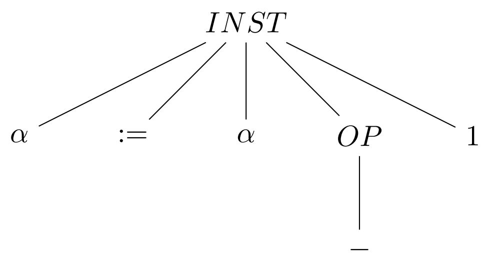
Wobei $\sigma = \{x \mapsto \mathsf{b}, y \mapsto \mathsf{a}\}$ ist.

$\square$

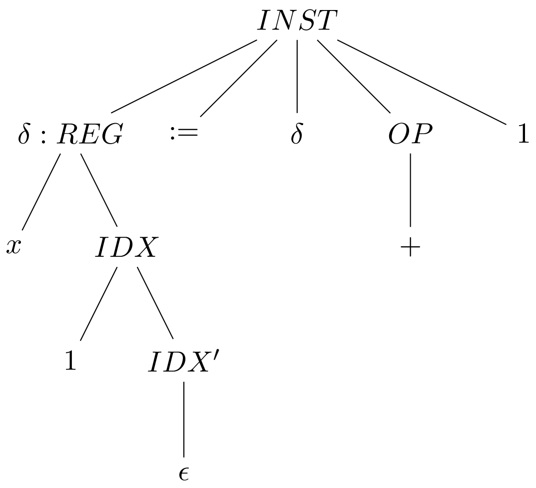
9. *Lösung.* a)



Teilbaum β:



Teilbaum γ:



b) Wir definieren eine Grammatik

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

mit

$$\begin{aligned} V &= \{S, V, Z, Z', D\}, \\ \Sigma &= \{+, -, 0, \ldots, 9, .\} \end{aligned}$$

und folgenden Regeln R:

$$\begin{aligned} S &\to V0 \mid VZ \mid VZ.DZ' \\ V &\to \epsilon \mid + \mid - \\ Z &\to 1Z' \mid \ldots \mid 9Z' \\ Z' &\to \epsilon \mid DZ' \\ D &\to 0 \mid \ldots \mid 9 \end{aligned}$$

$\square$

10. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1+x_2-1=b\}\ x_2 := x_2-1\ \{x_1+1+x_2=b\}}\,[\text{z}]}{\{x_1+x_2=b \wedge x_2 \neq 0\}\ x_2 := x_2-1\ \{x_1+x_2=b-1\}}\,[a_2] \quad \dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1+x_2=b\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2 \ldots}}{\{x_1+x_2=b-1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2 \ldots}}{\{x_1+x_2=b \wedge x_2 \neq 0\}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \{x_1+x_2=b\}}}{\dfrac{\{x_1+x_2=b\}\ \mathsf{while}\ x_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \mathsf{end}\ \{x_1+x_2=b \wedge x_2=0\}}{\{x_1=0 \wedge x_2=b\}\ \mathsf{while}\ x_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2-1; x_1 := x_1+1\ \mathsf{end}\ \{x_1=b\}}\,[a_1]}\,[\text{w}]$$

Bei den Abschwächungsregeln verwenden wir:

- $[a_1]$: $x_1 = 0 \wedge x_2 = b \models x_1 + x_2 = b$ und $x_1 + x_2 = b \wedge x_2 = 0 \models x_1 = b$

- $[a_2]$: $x_1 + x_2 = b \land x_2 \neq 0 \models x_1 + 1 + x_2 - 1 = b$
- $[a_3]$: $x_1 + x_2 = b - 1 \models x_1 + 1 + x_2 - 1 = b$

$\square$