7. *Lösung.* Diese Formel ist eine Tautologie. Dies kann mit der *Methode von Quine* wie folgt gezeigt werden.

   Betrachten wir zuerst die Zuweisung $\{E \to \mathsf{True}\}$.

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg(C \wedge D) \wedge E) \to \neg((C \wedge D) \vee \neg E)$$

$$\{E \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg(C \wedge D) \wedge \mathsf{True}) \to \neg((C \wedge D) \vee \neg\mathsf{True})$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D) \to \neg(C \wedge D)$$

$$\{C \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg(\mathsf{False} \wedge D) \to \neg(\mathsf{False} \wedge D)$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{C \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg(\mathsf{True} \wedge D) \to \neg(\mathsf{True} \wedge D)$$
$$\equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg D \to \neg D$$

$$\{D \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg\mathsf{True} \to \neg\mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{D \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge \neg\mathsf{False} \to \neg\mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

   Dann zeigen wir noch die Zuweisung $\{E \to \mathsf{False}\}$.

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg(C \wedge D) \wedge E) \to \neg((C \wedge D) \vee \neg E)$$

$$\{E \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg(C \wedge D) \wedge \mathsf{False}) \to \neg((C \wedge D) \vee \neg\mathsf{False})$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

   Da an allen Blättern des Baumes True erreicht wird, ist die Formel eine Tautologie.

   □

8. *Lösung.* a) Informell zeigen wir die Aussage indem wir zuerst die erste und dann die zweite Gleichung einsetzten:

$$\mathsf{f}(x, \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{b})) \approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, \mathsf{c}), \mathsf{b}) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{b})$$

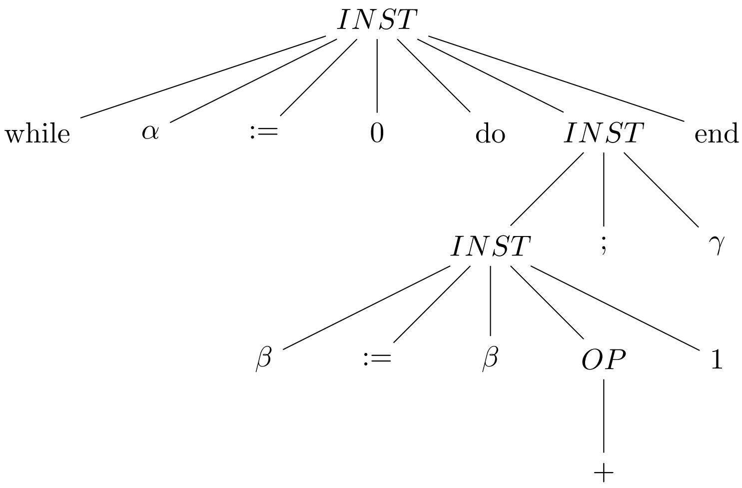
   b) Wir zeigen die Aussage mit dem folgendem Beweisbaum:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z) \in E}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(y,z)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,y),z)}\,\text{(a)}}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{b})) \approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{c}),\mathsf{b})}\,\text{(i, }\sigma\text{)} \qquad \cfrac{\cfrac{\mathsf{f}(x,\mathsf{c}) \approx x \in E}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{c}) \approx x}\,\text{(a)} \qquad \cfrac{}{E \vdash \mathsf{b} \approx \mathsf{b}}\,\text{(r)}}{E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{f}(x,\mathsf{c}),\mathsf{b}) \approx \mathsf{f}(x,\mathsf{b})}\,\text{(k)}}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{b})) \approx \mathsf{f}(x,\mathsf{b})}\,\text{(t)}$$

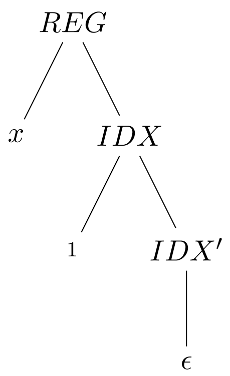
Wobei $\sigma = \{y \mapsto \mathsf{c}, z \mapsto \mathsf{b}\}$ ist.

□

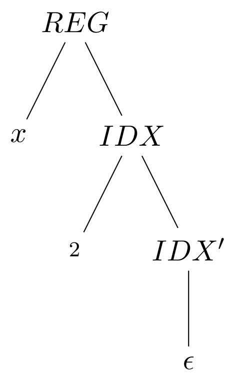
9. *Lösung.* a)



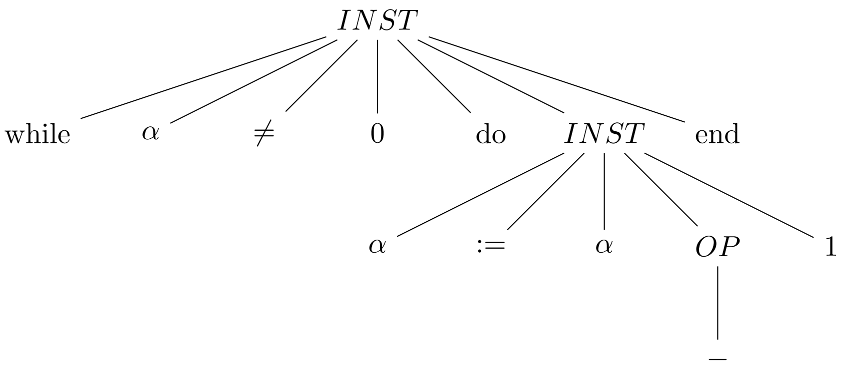
Teilbaum α:



Teilbaum β:



Teilbaum γ:



b) Wir definieren eine Grammatik

$$G = (\{S, M, I, I', D\}, \{0, \ldots, 9, e, .\}, R, S)$$

mit den Regeln R:

$$\begin{aligned} S &\to MeVI \\ M &\to I.I \mid I \\ I &\to DI' \\ I' &\to \epsilon \mid DI' \\ D &\to 0 \mid \ldots \mid 9 \\ V &\to + \mid - \mid \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

10. *Lösung.*

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\{x_1 - 1 + x_2 + 1 = a\}\ x_2 := x_2 + 1\ \{x_1 - 1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{z}]
}{\{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0\}\ x_1 := x_2 + 1\ \{x_1 + x_2 = a + 1\}}\,[a_2]
\quad
\dfrac{
\dfrac{}{\{x_1 - 1 + x_2 = a\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{z}]
}{\{x_1 + x_2 = a + 1\}\ x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[a_3]
}{\{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0\}\ x_1 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \{x_1 + x_2 = a\}}\,[\mathrm{s}]
}{
\dfrac{\{x_1 + x_2 = a\}\ \mathsf{while}\ x_1 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \mathsf{end}\ \{x_1 + x_2 = a \wedge x_1 = 0\}}{\{x_1 = a \wedge x_2 = 0\}\ \mathsf{while}\ x_1 \neq 0\ \mathsf{do}\ x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1\ \mathsf{end}\ \{x_2 = a\}}\,[a_1]
}\,[\mathrm{w}]
$$

Bei den Abschwächungsregeln verwenden wir:

- $[a_1]$: $x_1 = a \wedge x_2 = 0 \models x_1 + x_2 = a$ und $x_1 + x_2 = a \wedge x_1 = 0 \models x_2 = a$
- $[a_2]$: $x_1 + x_2 = a \wedge x_1 \neq 0 \models x_1 - 1 + x_2 + 1 = a$.
- $[a_3]$: $x_1 + x_2 = a + 1 \models x_1 - 1 + x_2 + 1 = a$.

□