1. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(\sim(a) + b) = ab$.

B. Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$.

C. Für alle $a \in B$ gilt $\sim(\sim(a)) = a$.

D. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim(a + b) = \sim(a) + \sim(b)$.

E. Für alle $a \in B$: $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$.

F. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \sim(a)$.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zur Verifikation nach Hoare ist falsch?

A. Wir nennen ein Programm P total korrekt für eine Spezifikation S, wenn S korrekt ist in Bezug auf die Zusicherungen Q und R, die der Spezifikation S entsprechen.

B. Ein Hoare-Triple besteht aus drei Komponenten: einem Programm und zwei eingeschränkten prädikatenlogischen Formeln.

C. Eine Formel, die sowohl *vor* der Ausführung des Programmes, wie auch *nach* der Ausführung richtig ist, nennt man Invariante.

D. Eine Zusicherung ist eine eingeschränkte prädikatenlogische Formel.

E. Sei $\{Q\}\ P\ \{R\}$ ein Hoare-Triple. Dann nennen wir P korrekt in Bezug auf Q und R, wenn dieses Triple im Hoare Kalkül ableitbar ist.

---

3. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist falsch? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3$ = reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2$ = kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1$ = kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0$ = rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L}$ = formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

B. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

4. Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formeln A ist richtig?

A. Jede Formel A besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.

B. Jede disjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Atomen.

C. Jede konjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

D. Jede Formel A besitzt eine disjunktive, nicht jedoch eine konjunktive Normalform.

E. Jede Formel A besitzt eine konjunktive, nicht jedoch eine disjunktive Normalform.

---

5. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	T	F
F	F	T

Stellen Sie die Wahrheitstabelle als aussagenlogische Formel über den Aussagenvariablen p und q dar, wobei p das erste und q das zweite Argument repräsentieren soll.

A. $(p \land q) \lor (p \land \neg q)$.

B. $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

C. $p \land (p \lor q)$.

D. $\neg p \lor q$.

E. $(\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$.

F. $\neg(p \lor \neg q) \rightarrow \mathsf{False}$.

---

6. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist rechtslinear.

B. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

C. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

D. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

E. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

---

1. Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formeln A ist richtig?

A. Jede disjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Atomen.

B. Jede Formel A besitzt eine konjunktive, nicht jedoch eine disjunktive Normalform.

C. Jede Formel A besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.

D. Jede konjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

E. Jede Formel A besitzt eine disjunktive, nicht jedoch eine konjunktive Normalform.

---

2. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist rechtslinear.

B. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

C. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

D. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

E. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

---

3. Welche der folgenden Aussagen zur Verifikation nach Hoare ist falsch?

A. Sei $\{Q\}\ P\ \{R\}$ ein Hoare-Triple. Dann nennen wir P korrekt in Bezug auf Q und R, wenn dieses Triple im Hoare Kalkül ableitbar ist.

B. Ein Hoare-Triple besteht aus drei Komponenten: einem Programm und zwei eingeschränkten prädikatenlogischen Formeln.

C. Eine Zusicherung ist eine eingeschränkte prädikatenlogische Formel.

D. Wir nennen ein Programm P total korrekt für eine Spezifikation S, wenn S korrekt ist in Bezug auf die Zusicherungen Q und R, die der Spezifikation S entsprechen.

E. Eine Formel, die sowohl *vor* der Ausführung des Programmes, wie auch *nach* der Ausführung richtig ist, nennt man Invariante.

---

4. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist falsch? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

B. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

---

5. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	T	F
F	F	T

Stellen Sie die Wahrheitstabelle als aussagenlogische Formel über den Aussagenvariablen p und q dar, wobei p das erste und q das zweite Argument repräsentieren soll.

A. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

B. $\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \mathsf{False}$.

C. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$.

D. $p \wedge (p \vee q)$.

E. $\neg p \vee q$.

F. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

---

6. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$.

B. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim (a + b) = \sim (a)+ \sim (b)$.

C. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(\sim (a) + b) = ab$.

D. Für alle $a \in B$: $a + 0 = a$ und $a \cdot 0 = 0$.

E. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b =\sim (a)$.

F. Für alle $a \in B$ gilt $\sim (\sim (a)) = a$.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$\neg t \wedge q \wedge p \rightarrow (\neg r \wedge \neg p) \vee (r \wedge t) \rightarrow \neg(s \wedge \neg s) \vee q \rightarrow q \vee p \rightarrow r \wedge (\neg q \vee r)$$

[16 Punkte]

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\cdot, +, \mathsf{1}, \mathsf{0}\}$, wobei die Stelligkeit von $\cdot$ und $+$ jeweils zwei und die Stelligkeit von $\mathsf{1}$ und $\mathsf{0}$ jeweils null ist.

$$\begin{aligned} x &= \mathsf{1} \\ \mathsf{1} + \mathsf{1} &= \mathsf{0} \\ \mathsf{0} + \mathsf{0} &= \mathsf{0} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash (\mathsf{0}+\mathsf{0}) \cdot \mathsf{0} = (\mathsf{1}+\mathsf{1}) \cdot \mathsf{1}$$

gilt. `[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen:

a) Es sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ gegeben:

$$L = \{u\mathsf{b}v \mid u, v \in \Sigma^* \text{ und } \#\mathsf{c}(u) = \#\mathsf{a}(v)\},$$

wobei $\#\mathsf{a}(w)$ die Anzahl von Symbol a in Wort w repräsentiert. Geben Sie eine Grammatik G für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

b) Gegeben sei die unbeschränkte Grammatik $G = (\{S, A\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{b}SA\mathsf{c} \mid \mathsf{bac} \\ \mathsf{a}A &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{c}A &\to A\mathsf{c} \end{aligned}$$

Geben Sie eine Ableitung für den String bbacc an. `[8 Punkte]`

---

10. Verifikation: Betrachten Sie das folgende `while`-Programm P für eine Registermaschine.

$$x_1 := x_1 + 1; x_1 := x_1 - 1$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Hoare-Kalküls, dass der Wert des Registers x_1 vor und nach der Ausführung von P ident ist. Dazu:

a) Formulieren Sie ein geeignetes Hoare-Tripel. Nehmen Sie dazu an, dass der Wert von x_1 vor der Ausführung durch die Konstante c ausgedrückt wird. `[4 Punkte]`

b) Wenden Sie die Regeln des Hoare-Kalküls an, um die Korrektheit des in a) formulierten Tripels zu zeigen. `[8 Punkte]`

c) Warum kann diese Eigenschaft für das Programm P': $x_1 := x_1 - 1; x_1 := x_1 + 1$ nicht gezeigt werden?

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Semantik der Registermaschine und finden Sie einen Wert c, für den die Eigenschaft nicht gilt. `[4 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “version2”

```
Version 1:  D  A  C  A  B  D

Version 2:  C  C  D  B  F  B
```