1. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \vee (q \wedge r) \approx (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

B. $p \vee \neg p \approx \textsf{True}$.

C. $p \vee p \approx p$.

D. $p \to \textsf{False} \approx \neg p$.

E. $\neg\neg p \approx p$.

F. $p \wedge (p \vee q) \approx \neg p$.

---

2. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, \mathsf{ca}, \mathsf{aba}\}$, $M = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ und $N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^*$. Was ist $(LM) \cap N$?

A. $(LM) \cap N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^*$

B. $(LM) \cap N = \varnothing$

C. $(LM) \cap N = \{\epsilon, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cac}, \mathsf{abac}\}$

D. $(LM) \cap N = \{\mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

E. $(LM) \cap N = \{\epsilon, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

F. $(LM) \cap N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

---

3. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$, wenn $a \cdot b = 1$ und $a + b = 0$, dann $b = \sim(a)$.

B. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + ab = ab$.

C. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim(a + b) = \sim(a) + \sim(b)$.

D. $\langle B; \cdot, 1\rangle$ ist eine kommutative Gruppe.

E. Für alle $a \in B$ gilt $a \cdot \sim(a) = 1$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + \sim(a)b = a + b$.

---

4. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	F	T
F	T	F

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln repräsentiert die oben angegebene Wahrheitstabelle über den Aussagenvariablen p und q *nicht*? (Hierbei repräsentiert p das erste und q das zweite Argument.)

A. $\neg((p \land q \land \mathsf{True}) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg p))$.

B. $(p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)$.

C. $\neg(p \leftrightarrow q)$.

D. $(p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$.

E. $(p \land q) \lor (p \land \neg q)$.

---

5. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{F, W, V\}, \Sigma, R, F)$, wobei

$$\Sigma := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), \mathsf{False}, \mathsf{True}, p, q, r\}$$

und die Regeln R wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow V \mid W \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \rightarrow F) \\ W &\rightarrow \mathsf{True} \mid \mathsf{False} \\ V &\rightarrow p \mid q \mid r \end{aligned}$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht beschränkt.

B. Die Grammatik ist nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist beschränkt, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

E. Die Grammatik ist rechtslinear.

F. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

6. Welches der folgenden klassischen Probleme der Informatik ist entscheidbar?

A. Gegeben eine kontextfreie Grammatik G. Gibt es ein Wort $x \in \mathsf{L}(G)$, sodass für x zwei verschiedene Linksableitungen existieren?

B. Gegeben zwei Listen von Wörtern $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$. Existieren Indices $i_1, \ldots, i_m$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$?

C. Das uniforme Halteproblem für Turingmaschinen. Das *uniforme* Halteproblem ist das Problem, ob ein gegebenes Programm auf jeder beliebigen Eingabe hält.

D. Gegeben ein beliebiges Programm P, ist P ein "hello, world"-Programm?

E. Das Halteproblem für die eingeschränkte Klasse von Turingmaschinen, die den Inhalt des unendlichen Bandes lesen, nicht aber verändern dürfen.

---

7. Algebra: Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra mit der Trägermenge B. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in B$ die Eindeutigkeit des Komplements gilt:

$$Wenn\ a + b = 1\ und\ a \cdot b = 0,\ dann\ b = \sim(a)$$

Ergänzen Sie dazu den folgenden Beweis: `[14 Punkte]`

$$\begin{aligned}
b &= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= b \cdot (a + \sim(a)) \\
&= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \underline{\hspace{6cm}},\ da\ a \cdot b = 0 \\
&= \underline{\hspace{6cm}} \\
&= (a + b) \cdot \sim(a) \\
&= \underline{\hspace{6cm}},\ da\ \underline{\hspace{2.5cm}} \\
&= \sim(a)
\end{aligned}$$

Gilt die gezeigte Aussage auch für die binäre Algebra? `[2 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{f}, \mathsf{g}\}$, wobei a und b die Stelligkeit 0, und f und g die Stelligkeit 2 haben:

$$\mathsf{b} \approx x$$
$$\mathsf{f}(x, \mathsf{a}) \approx \mathsf{g}(\mathsf{a}, x)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) = \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b})$$

gilt.

---

9. Formale Sprachen: Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}SB \mid \mathsf{b}SA \mid \epsilon \\ A &\to \mathsf{a} \mid \mathsf{a}A \\ B &\to \mathsf{b} \mid \mathsf{b}B \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Syntaxbaum in Bezug auf G_1 für das Wort `abaabb` an. `[4 Punkte]`

b) Ist die Grammatik G_1 eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 für die Sprache $\{\mathsf{a}^n\mathsf{c}\mathsf{b}^{2n} \mid n \geq 0\}$ an. `[8 Punkte]`

---

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R:

(P) `while` $x_2 \neq 0$ `do` $x_2 := x_2 - 1; x_1 := x_1 + 1$ `end`
(Q) $x_1 = 0, x_2 = b$
(R) $x_1 = b$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "version3"

```
Version 1:  F  F  F  E  F  E
```