1. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	F	T
F	T	F

Stellen Sie die Wahrheitstabelle als aussagenlogische Formel über den Aussagenvariablen p und q dar, wobei p das erste und q das zweite Argument repräsentieren soll.

A. $(p \to q) \vee (\neg q \to \neg p)$.

B. $p \vee (p \wedge q) \to p$.

C. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

D. $(\neg q \vee \neg p) \vee q$.

E. $p \to (q \wedge p)$.

F. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

---

2. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(a + b) = \sim(a)$.

B. $\langle B; +, 0\rangle$ ist eine kommutative Gruppe.

C. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + \sim(a)b = b$.

D. Für alle $a \in B$ gilt $a + \sim(a) = 0$.

E. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \sim(a)$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim(b + a) = \sim(b) + \sim(a)$.

---

3. Welche der folgenden Aussagen zu Turingmaschinen ist falsch?

A. Jede TM kann in einen äquivalenten endlichen Automaten umgewandelt werden.

B. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer TM ist, ist auf einer RM berechenbar.

C. Für jede Sprache L, die von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert wird, existiert eine TM, die L akzeptiert.

D. Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

E. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, ist auf einer TM berechenbar.

---

4. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid 0A$$
$$A \to 0S$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

B. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

C. Die Grammatik ist rechtslinear.

D. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

E. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

---

5. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cup M) \cap N$?

A. $(L \cup M) \cap N = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

B. $(L \cup M) \cap N = \varnothing$

C. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

D. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

E. $(L \cup M) \cap N = \{\epsilon, 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111\}$

---

6. Welche der folgenden Aussagen zur Algebra ist falsch?

A. Die Algebra der Booleschen Funktionen ist eine Algebra.

B. Jede binäre Operation hat maximal ein neutrales Element.

C. Jede Algebra ist auch eine Boolesche Algebra.

D. Seien A, B Boolesche Ausdrücke und f, g ihre Booleschen Funktionen. Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Algebra der Boolschen Funktionen.

E. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a \in B$ gilt $\sim(\sim(a)) = a$.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg E)) \rightarrow (\neg(C \wedge D) \wedge E)$$

[16 Punkte]

8. **Algebra:** Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{h} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{f}\}$, wobei a und b die Stelligkeit 0, und f die Stelligkeit 2 hat:

$$\mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z))$$
$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, z) \approx z$$

a) Zeigen Sie mit informellem (üblichem) Gleichungslösen, dass

$$E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{a}), z) \approx \mathsf{f}(\mathsf{b}, z)$$

gilt. `[6 Punkte]`

b) Zeigen Sie die Aussage nochmals mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik. `[10 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen:

a) Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

mit

$$\begin{aligned} V &= \{INST, REG, OP, IDX, IDX'\}, \\ \Sigma &= \{:=, 0, 1, ;, \text{while}, \neq, \text{do}, \text{end}, x, {}_0, \ldots, {}_9, +, -\} \\ S &= INST \end{aligned}$$

und den Regeln R:

$$\begin{aligned} INST &\to REG := REG\ OP\ 1 \\ &\to INST\ ;\ INST \\ &\to \text{while } REG \neq 0 \text{ do } INST \text{ end} \\ REG &\to x\ IDX \\ IDX &\to {}_0 \mid {}_1\ IDX' \mid \ldots \mid {}_9\ IDX' \\ IDX' &\to {}_0\ IDX' \mid \ldots \mid {}_9\ IDX' \mid \epsilon \\ OP &\to + \mid - \end{aligned}$$

Leiten Sie den Syntaxbaum für das folgende Wort ab.

$$\text{while } x_2 \neq 0 \text{ do } x_2 := x_2 - 1; x_1 := x_1 + 1 \text{ end}$$

`[6 Punkte]`

b) Finden Sie eine Grammatik, welche die Sprache L der Gleitkommazahlen mit

$$0, -0, -0.5, +3.14, 42.1, 42.100, \ldots \in L$$

aber

$$01, 0. \notin L$$

beschreibt. `[10 Punkte]`

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R:

(P) $\texttt{while}\ x_2 \neq 0\ \texttt{do}\ x_2 := x_2 - 1; x_1 := x_1 + 1\ \texttt{end}$
(Q) $x_1 = 0, x_2 = b$
(R) $x_1 = b$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “versionG”

```
Version 1:  C  E  A  C  E  C
```