1. Betrachten Sie die folgende Wahrheitstabelle:

?	T	F
T	F	T
F	T	F

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln repräsentiert die oben angegebene Wahrheitstabelle über den Aussagenvariablen p und q *nicht*? (Hierbei repräsentiert p das erste und q das zweite Argument.)

A. $\neg(p \leftrightarrow q)$.

B. $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

C. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

D. $\neg((p \wedge q \wedge \mathsf{True}) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg p))$.

E. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

A. Es gibt Funktionen $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

B. Sei L eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann L nur dann von einer TM berechnet werden, wenn L regulär ist.

C. Jede totale Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

E. Für jede Sprache L, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.

---

3. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + ab = ab$.

B. Für alle $a, b \in B$ gilt $a+ \sim (a)b = a + b$.

C. Für alle $a \in B$ gilt $a\cdot \sim (a) = 1$.

D. Für alle $a, b \in B$, wenn $a \cdot b = 1$ und $a + b = 0$, dann $b =\sim (a)$.

E. $\langle B; \cdot, 1\rangle$ ist eine kommutative Gruppe.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $\sim (a + b) = \sim (a)+ \sim (b)$.

---

4. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3$ = reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2$ = kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1$ = kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0$ = rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L}$ = formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Booleschen Algebra ist richtig?

A. Die Mengenalgebra ist eine Boolesche Algebra, aber nicht jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

B. Jeder Boolesche Ausdruck kann in eine disjunktive Normalform umgewandelt werden, nicht jedoch in eine konjunktive Normalform.

C. Die binäre Algebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra.

D. Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

E. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a, b \in B$ gilt: $\sim (a + b) = \sim (a) + \sim (b)$.

---

6. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cap M) \cup N$?

A. $(L \cap M) \cup N = \varnothing$

B. $(L \cap M) \cup N = \{0, 1\}^*$

C. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon\}$

D. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

E. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((\neg A \vee B) \wedge (\neg(C \wedge D) \wedge E)) \rightarrow \neg((C \wedge D) \vee \neg E)$$

[16 Punkte]

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{h} = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{f}\}$, wobei b und c die Stelligkeit 0, und f die Stelligkeit 2 hat:

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(y, z)) &\approx \mathsf{f}(\mathsf{f}(x, y), z) \\ \mathsf{f}(x, \mathsf{c}) &\approx x \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie mit informellem (üblichem) Gleichungslösen, dass

$$E \vdash \mathsf{f}(x, \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{b})) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{b})$$

gilt. `[6 Punkte]`

b) Zeigen Sie die Aussage nochmals mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik. `[10 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen

a) Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

mit

$$\begin{aligned} V &= \{INST, REG, OP, IDX, IDX'\}, \\ \Sigma &= \{:=, 0, 1, ;, \text{while}, \neq, \text{do}, \text{end}, x, {}_0, \ldots, {}_9, +, -\} \\ S &= INST \end{aligned}$$

und den Regeln R:

$$\begin{aligned} INST &\to REG := REG\ OP\ 1 \\ &\to INST\ ;\ INST \\ &\to \text{while } REG \neq 0 \text{ do } INST \text{ end} \\ REG &\to x\ IDX \\ IDX &\to {}_0 \mid {}_1\ IDX' \mid \ldots \mid {}_9\ IDX' \\ IDX' &\to {}_0\ IDX' \mid \ldots \mid {}_9\ IDX' \mid \epsilon \\ OP &\to + \mid - \end{aligned}$$

Leiten Sie den Syntaxbaum für das folgende Wort ab.

$$\text{while } x_1 \neq 0 \text{ do } x_2 := x_2 + 1; \text{while } x_1 \neq 0 \text{ do } x_1 := x_1 - 1 \text{ end end}$$

`[6 Punkte]`

b) Finden Sie eine Grammatik, welche die Sprache L der Gleitkommazahlen in wissenschaftlicher Notation mit

$$\texttt{3.14e}-\texttt{10}, \texttt{0.0e0}, \texttt{42e}-\texttt{0}, \texttt{42e10}, \texttt{001e01}, \texttt{3e}+\texttt{2} \in L$$

aber

$$\texttt{1e}, \texttt{0.e42} \notin L$$

beschreibt. `[10 Punkte]`

10. Verifikation: Gegeben seien P, Q und R:

(P) `while` $x_1 \neq 0$ `do` $x_2 := x_2 + 1; x_1 := x_1 - 1$ `end`
(Q) $x_1 = a, x_2 = 0$
(R) $x_2 = a$

Zeigen Sie, dass das `while`-Programm P in Bezug auf die Vorbedingung Q und die Nachbedingung R partiell korrekt ist. Verwenden Sie also die Regeln aus dem Skriptum, um das Hoare-Tripel $\{Q\}\ P\ \{R\}$ abzuleiten. `[16 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "versionU"

```
Version 1:  C  C  B  B  D  B
```