7. *Lösung.* Diese Formel ist eine Tautologie. Dies kann mit der *Methode von Quine* wie folgt gezeigt werden.

Betrachten wir zuerst die Zuweisung $\{E \to \mathsf{True}\}$.

$$(\neg A \lor B) \land \neg((C \land D) \lor \neg E) \to (\neg(C \land D) \land E)$$

$$\{E \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg((C \land D) \lor \neg\mathsf{True}) \to (\neg(C \land D) \land \mathsf{True})$$
$$\equiv (\neg A \lor B) \land \neg(C \land D) \to \neg(C \land D)$$

$$\{C \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg(\mathsf{False} \land D) \to \neg(\mathsf{False} \land D)$$
$$\equiv (\neg A \lor B) \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{C \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg(\mathsf{True} \land D) \to \neg(\mathsf{True} \land D)$$
$$\equiv (\neg A \lor B) \land \neg D \to \neg D$$

$$\{D \to \mathsf{True}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg\mathsf{True} \to \neg\mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{D \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg\mathsf{False} \to \neg\mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

Dann zeigen wir noch die Zuweisung $\{E \to \mathsf{False}\}$.

$$(\neg A \lor B) \land \neg((C \land D) \lor \neg E) \to (\neg(C \land D) \land E)$$

$$\{E \to \mathsf{False}\}$$

$$(\neg A \lor B) \land \neg((C \land D) \lor \neg\mathsf{False}) \to (\neg(C \land D) \land \mathsf{False})$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

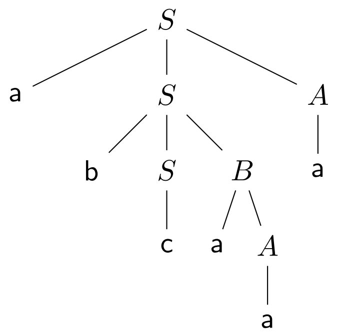
Da an allen Blättern des Baumes True erreicht wird, ist die Formel eine Tautologie.

□

8. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{s}(x) + y = \mathsf{s}(x+y) \in E}{E \vdash \mathsf{s}(x) + y = \mathsf{s}(x+y)}\,[a]}{E \vdash \mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0))}\,[i]}{E \vdash \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0)))}\,[k] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 + x = x \in E}{E \vdash 0 + x = x}\,[a]}{E \vdash 0 + \mathsf{s}(0) = \mathsf{s}(0)}\,[i]}{E \vdash \mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))}\,[k]}{E \vdash \mathsf{s}(\mathsf{s}(0 + \mathsf{s}(0))) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))}\,[k]}{E \vdash \mathsf{s}(\mathsf{s}(0) + \mathsf{s}(0)) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0)))}\,[t]$$

$\square$

9. *Lösung.* a) 

b) G_1 ist eindeutig, da es für jedes Wort $x \in \mathsf{L}(G_1)$ nur genau eine Linksableitung gibt. Mit den Regeln für S erhält man jeweils nur Wörter mit unterschiedlichen Präfixen, alleine mit diesen Regeln könnte also keine Mehrdeutig entstehen. Der hintere Teil der Wörter (der aus den As und Bs abgeleitet wird) kann auch nicht mit unterschiedlichen Linksableitungen erzeugt werden.

c) $G_2 = (\{S\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$S \to \mathsf{aa}S\mathsf{b} \mid \mathsf{c}$$

$\square$

10. *Lösung.* a) Die Grammatik ist kontextfrei, daher ist die Grammatik auch rekursiv aufzählbar. Alternativ kann mit der Lösung von Aufgabe b) argumentiert werden. Eine Sprache ist rekursiv aufzählbar, wenn sie von einer Turingmaschine akzeptiert wird.

b) Wir definieren die Turingmaschine

$$M = (\{s, q_0, q_0', u_0, q_1, q_1', u_1, p, t, r\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

wobei die Zustandsübergangsfunktion δ durch folgende Tabelle gegeben ist:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p,a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p,a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$			
s	0	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$			
s	1	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$			
s	$\sqcup$	$(r, *, \mathrm{R})$			
q_0	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{R})$	q_1	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{R})$
q_0	$* \in \{0,1\}$	$(q_0', *, \mathrm{R})$	q_1	$* \in \{0,1\}$	$(q_1', *, \mathrm{R})$
q_0	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$	q_1	$\vdash$	$(r, \vdash, \mathrm{R})$
q_0'	$\sqcup$	$(u_0, \sqcup, \mathrm{L})$	q_1'	$\sqcup$	$(u_1, \sqcup, \mathrm{L})$
q_0'	$* \in \{0,1\}$	$(q_0', *, \mathrm{R})$	q_1'	$* \in \{0,1\}$	$(q_1', *, \mathrm{R})$
q_0'	$\vdash$	$(r, *, \mathrm{R})$	q_1'	$\vdash$	$(r, *, \mathrm{R})$
u_0	0	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$	u_1	1	$(p, \sqcup, \mathrm{L})$
u_0	$* \in \Gamma \setminus \{0\}$	$(r, *, \mathrm{R})$	u_1	$* \in \Gamma \setminus \{1\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
p	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$			
p	$* \in \Gamma \setminus \{0,1\}$	$(p, *, \mathrm{L})$			
p	$\sqcup$	$(r, \sqcup, \mathrm{R})$			

c) Die Turingmaschine T akzeptiert das Wort abcab sowie alle Wörter in der Menge $\{\mathsf{a}^l\mathsf{b}^k\mathsf{c}\mathsf{a}^k\mathsf{b}^l \mid l,k > 0\}$.

□