7. *Lösung.* Diese Formel ist unerfüllbar. D. h. die Negation der Formel ist eine Tautologie. Dies kann mit der *Methode von Quine* wie folgt gezeigt werden.

   Betrachten wir zuerst die Zuweisung $\{E \to \mathsf{True}\}$.

$$(A \to B) \land \neg(E \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land E$$

$$\{E \to \mathsf{True}\}$$

$$(A \to B) \land \neg(\mathsf{True} \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land \mathsf{True}$$
$$\equiv (A \to B) \land \neg(C \land D) \to (D \to \neg C)$$

$$\{D \to \mathsf{False}\}$$

$$(A \to B) \land \neg(C \land \mathsf{False}) \to (\mathsf{False} \to \neg C)$$
$$\equiv (A \to B) \land \mathsf{True} \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{D \to \mathsf{True}\}$$

$$(A \to B) \land \neg(C \land \mathsf{True}) \to (\mathsf{True} \to \neg C)$$
$$\equiv (A \to B) \land \neg C \to \neg C$$

$$\{C \to \mathsf{True}\}$$

$$(A \to B) \land \neg\mathsf{True} \to \neg\mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

$$\{C \to \mathsf{False}\}$$

$$(A \to B) \land \neg\mathsf{False} \to \neg\mathsf{False}$$
$$\equiv (A \to B) \to \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

   Dann zeigen wir noch die Zuweisung $\{E \to \mathsf{False}\}$.

$$(A \to B) \land \neg(E \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land E$$

$$\{E \to \mathsf{False}\}$$

$$(A \to B) \land \neg(\mathsf{False} \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{False} \to \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{True}$$

   Da an allen Blättern des Baumes True erreicht wird, ist die Formel $(A \to B) \land \neg(E \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land E$ eine Tautologie und daher $\neg((A \to B) \land \neg(E \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land E)$ unerfüllbar. □

8. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z) \in E}{E \vdash (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)}\,(\mathrm{a})}{E \vdash (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e}) \cdot \mathsf{e} \approx \mathsf{e} \cdot (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e})}\,(\mathrm{i}, \sigma) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x^{-1} \cdot x \approx \mathsf{e} \in E}{E \vdash x^{-1} \cdot x \approx \mathsf{e}}\,(\mathrm{a})}{E \vdash \mathsf{e} \approx x^{-1} \cdot x}\,(\mathrm{s}) \qquad \dfrac{}{E \vdash \mathsf{e} \cdot \mathsf{e} \approx \mathsf{e} \cdot \mathsf{e}}\,(\mathrm{r})}{E \vdash \mathsf{e} \cdot (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e}) \approx (x^{-1} \cdot x) \cdot (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e})}\,(\mathrm{k})}{E \vdash (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e}) \cdot \mathsf{e} \approx (x^{-1} \cdot x) \cdot (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e})}\,(\mathrm{t})$$

mit Substitution $\sigma = \{\, x \mapsto \mathsf{e},\ y \mapsto \mathsf{e},\ z \mapsto \mathsf{e} \,\}$.

$\square$

9. *Lösung.* a) Kontextfrei, da nur Regeln der Form $P \to Q$ mit $P \in V$ und $Q \in (V \cup \Sigma)^*$ vorliegen.

b)

$$\underline{K} \to \underline{K}\underline{K} \to \mathsf{a}\underline{K}\mathsf{b}K \to \mathsf{a}\underline{K}\underline{K}\mathsf{b}K \to \mathsf{a}\underline{\mathsf{ab}}K\mathsf{b}K \to \mathsf{aab}\underline{\mathsf{ab}}\mathsf{b}K \to \mathsf{aababb}\underline{\mathsf{ab}}$$

c) Wir definieren die rechtslineare Grammatik $G_2 = (\{S, T\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgenden Regeln:

$$S \to \mathsf{a}S \mid \mathsf{b}S \mid \mathsf{aaa}T$$
$$T \to \epsilon \mid \mathsf{a}T \mid \mathsf{b}T$$

$\square$

10.
- a) In der Chomsky Hierarchie sieht man genau, dass jede Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, rekursiv aufzählbar ist. Daraus folgt, dass auch $L(G)$ rekursiv aufzählbar ist.
- b) Das Wort aab wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to q_1 \to q_2 \to r \to r \ldots$, von M nicht akzeptiert.
  Das Wort aa wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to q_1 \to q_2 \to t \to t \ldots$, von M akzeptiert.
  Das Wort baa wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to r \to r \ldots$, von M nicht akzeptiert.

  Wir haben den folgenden Satz in der Vorlesung kennengelernt: *Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.* Dadurch ist die akzeptierte Sprache unserer TM M rekursiv aufzählbar.
- c) Folgende Turing Maschine M' akzeptiert $L(G)$:
  $M' = (\{s, t, r, q_0, q_{0\sqcup}, q_1, q_{1\sqcup}, q_\mathrm{e}\}, \{\mathsf{0}, \mathsf{1}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{0}, \mathsf{1}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\mathsf{0}$	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$	s	$\mathsf{1}$	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$
s	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{0}, \mathsf{1}, \vdash\}$	$(r, *, \mathrm{R})$	s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
q_0	$\sqcup$	$(q_{0\sqcup}, \sqcup, \mathrm{L})$	q_0	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_0, *, \mathrm{R})$
q_1	$\sqcup$	$(q_{1\sqcup}, \sqcup, \mathrm{L})$	q_1	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_1, *, \mathrm{R})$
$q_{0\sqcup}$	$\mathsf{0}$	$(q_\mathrm{e}, \sqcup, \mathrm{L})$	$q_{0\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{0}\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
$q_{1\sqcup}$	$\mathsf{1}$	$(q_\mathrm{e}, \sqcup, \mathrm{L})$	$q_{1\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{1}\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
q_e	$\vdash$	$(t, *, \mathrm{R})$	q_e	$* \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$	$(q_\mathrm{e}, \sqcup, \mathrm{L})$