7. *Lösung.* Diese Formel ist unerfüllbar. Dies kann mit der *Methode von Quine* wie folgt gezeigt werden.

Betrachten wir zuerst die Zuweisung $\{E \to \mathsf{True}\}$.

$$\neg((A \to B) \to (E \to C \land D)) \land \neg((D \to \neg C) \land E)$$

$$\{E \to \mathsf{True}\}$$

$$\neg((A \to B) \to (\mathsf{True} \to C \land D)) \land \neg((D \to \neg C) \land \mathsf{True})$$
$$\equiv \neg((A \to B) \to (C \land D)) \land \neg(D \to \neg C)$$

$$\{D \to \mathsf{False}\}$$

$$\neg((A \to B) \to (C \land \mathsf{False})) \land \neg(\mathsf{False} \to \neg C)$$
$$\equiv \neg((A \to B) \to \mathsf{False}) \land \neg\mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False}$$

$$\{D \to \mathsf{True}\}$$

$$\neg((A \to B) \to (C \land \mathsf{True})) \land \neg(\mathsf{True} \to \neg C)$$
$$\equiv \neg((A \to B) \to C) \land C$$

$$\{C \to \mathsf{True}\}$$

$$\neg((A \to B) \to \mathsf{True}) \land \mathsf{True}$$
$$\equiv \neg\mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False}$$

$$\{C \to \mathsf{False}\}$$

$$\neg((A \to B) \to \mathsf{False}) \land \mathsf{False}$$
$$\equiv \mathsf{False}$$

Dann zeigen wir noch die Zuweisung $\{E \to \mathsf{False}\}$.

$$\neg((A \to B) \to (E \to C \land D)) \land \neg((D \to \neg C) \land E)$$

$$\{E \to \mathsf{False}\}$$

$$\neg((A \to B) \to (\mathsf{False} \to C \land D)) \land \neg((D \to \neg C) \land \mathsf{False})$$
$$\equiv \neg((A \to B) \to \mathsf{True}) \land \neg\mathsf{False}$$
$$\equiv \neg\mathsf{True} \land \mathsf{True}$$
$$\equiv \mathsf{False}$$

Da an allen Blättern des Baumes False erreicht wird, ist die Formel unerfüllbar. □

8. *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{g}(x)+y \approx \mathsf{g}(x+y) \in E}{E \vdash \mathsf{g}(x)+y \approx \mathsf{g}(x+y)}\,(\text{a})}{E \vdash \mathsf{g}(0)+\mathsf{g}(0) \approx \mathsf{g}(0+\mathsf{g}(0))}\,(\text{i}, \sigma_1) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x+y \approx y+x \in E}{E \vdash x+y \approx y+x}\,(\text{a})}{E \vdash 0+x \approx x+0}\,(\text{i}, \sigma_0) \quad \dfrac{x+0 \approx x \in E}{E \vdash x+0 \approx x}\,(\text{a})}{E \vdash 0+x \approx x}\,(\text{t})}{E \vdash 0+\mathsf{g}(0) \approx \mathsf{g}(0)}\,(\text{i}, \sigma_2)}{E \vdash \mathsf{g}(0+\mathsf{g}(0)) \approx \mathsf{g}(\mathsf{g}(0))}\,(\text{k})}{E \vdash \mathsf{g}(0)+\mathsf{g}(0) \approx \mathsf{g}(\mathsf{g}(0))}\,(\text{t})}{E \vdash \mathsf{g}(\mathsf{g}(0)+\mathsf{g}(0)) = \mathsf{g}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(0)))}\,(\text{k})$$

mit Substitutionen $\sigma_0 = \{\, x \mapsto 0,\, y \mapsto x \,\}$, $\sigma_1 = \{\, x \mapsto 0,\, y \mapsto \mathsf{g}(0) \,\}$ und $\sigma_2 = \{\, x \mapsto \mathsf{g}(0) \,\}$. □

9. *Lösung.* a) Kontextfrei, da nur Regeln der Form $P \to Q$ mit $P \in V$ und $Q \in (V \cup \Sigma)^*$ vorliegen.

b)

$$\underline{M} \to \underline{\mathsf{b}M\mathsf{a}} \to \mathsf{b}\underline{MM}\mathsf{a} \to \mathsf{b}\underline{\mathsf{b}M\mathsf{a}}M\mathsf{a} \to \mathsf{bb}\underline{\mathsf{baa}}M\mathsf{a} \to \mathsf{bbbaa}\underline{\mathsf{baa}}$$

c) Wir definieren die rechtslineare Grammatik $G_2 = (\{S, T\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgenden Regeln:

$$S \to \mathsf{a}S \mid \mathsf{b}K \mid \mathsf{bbb}T$$
$$T \to \epsilon \mid \mathsf{a}T \mid \mathsf{b}T$$

□

10.

- a) In der Chomsky Hierarchie sieht man genau, dass jede Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, rekursiv aufzählbar ist. Daraus folgt, dass auch $L(G)$ rekursiv aufzählbar ist.
- b) Das Wort bb wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to q_1 \to q_2 \to t \to t \ldots$, von M akzeptiert.
  Das Wort bba wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to q_1 \to q_2 \to r \to r \ldots$, von M nicht akzeptiert.
  Das Wort baa wird nach der folgenden Sequenz von Zuständen, $s \to s \to r \to r \ldots$, von M nicht akzeptiert.

  Wir haben den folgenden Satz in der Vorlesung kennengelernt: *Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.* Dadurch ist die akzeptierte Sprache unserer TM M rekursiv aufzählbar.
- c) Folgende Turing Maschine M' akzeptiert $L(G)$:

  $M' = (\{s, t, r, q_0, q_{0\sqcup}, q_1, q_{1\sqcup}, q_e\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	a	$(q_0, \vdash, \mathrm{R})$	s	b	$(q_1, \vdash, \mathrm{R})$
s	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \vdash\}$	$(r, *, \mathrm{R})$	s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$
q_0	$\sqcup$	$(q_{0\sqcup}, \sqcup, \mathrm{L})$	q_0	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_0, *, \mathrm{R})$
q_1	$\sqcup$	$(q_{1\sqcup}, \sqcup, \mathrm{L})$	q_1	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_1, *, \mathrm{R})$
$q_{0\sqcup}$	a	$(q_{\mathrm{e}}, \sqcup, \mathrm{L})$	$q_{0\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
$q_{1\sqcup}$	b	$(q_{\mathrm{e}}, \sqcup, \mathrm{L})$	$q_{1\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
q_{e}	$\vdash$	$(t, *, \mathrm{R})$	q_{e}	$* \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$	$(q_{\mathrm{e}}, \sqcup, \mathrm{L})$