1. Betrachten Sie die folgende Inferenz im Hoare Kalkül, wobei eine Vorbedinung durch die P abstrahiert wurde:

$$\frac{\{\qquad P \qquad\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{x_1 + x_2 = b\}}{\{x_1 + x_2 = b - 1\}\ x_1 := x_1 + 1\ \{x_1 + x_2 = b\}}$$

Welche der folgenden Vorbedingungen kann korrekt für P eingesetzt werden?

A. $x_1 + x_2 = b - 1$.

B. $x_1 + x_2 - 1 = b$.

C. $x_1 + x_2 = b + 1$.

D. $x_1 + 1 + x_2 = b - 1$.

E. $x_1 + x_2 = b$.

F. $x_1 + 1 + x_2 = b$.

---

2. Welche der folgenden Aussagen zur Verifikation nach Hoare ist falsch?

A. Sei $\{Q\}\ P\ \{R\}$ ein Hoare-Triple. Dann nennen wir P korrekt in Bezug auf Q und R, wenn dieses Triple im Hoare Kalkül ableitbar ist.

B. Eine Formel, die sowohl *vor* der Ausführung des Programmes, wie auch *nach* der Ausführung richtig ist, nennt man Invariante.

C. Eine Zusicherung ist eine eingeschränkte prädikatenlogische Formel.

D. Ein Hoare-Triple besteht aus drei Komponenten: einem Programm und zwei eingeschränkten prädikatenlogischen Formeln.

E. Wir nennen ein Programm P total korrekt für eine Spezifikation S, wenn S korrekt ist in Bezug auf die Zusicherungen Q und R, die der Spezifikation S entsprechen.

---

3. Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (\{S\}, \{(,)\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt gegeben:

$$S \to \epsilon \mid SS \mid (S)$$

Welchen Typ hat diese Grammatik?

A. Die Grammatik ist nicht rekursiv aufzählbar.

B. Die Grammatik ist rekursiv aufzählbar, aber nicht kontextsensitiv.

C. Die Grammatik ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

D. Die Grammatik ist rechtslinear.

E. Die Grammatik ist kontextfrei, aber nicht rechtslinear.

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig, wenn $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \overline{}, 0, 1\rangle$ eine Boolsche Algebra ist?

A. Für alle $a, b \in B$ gilt $a(a+b) = \overline{a}$.

B. Für alle $a, b \in B$ gilt $\overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a}$.

C. $\langle B; +, 0\rangle$ ist eine kommutative Gruppe.

D. Für alle $a \in B$ gilt $a + \overline{a} = 0$.

E. Für alle $a, b \in B$, wenn $a + b = 0$ und $ab = 1$, dann $b = \overline{a}$.

F. Für alle $a, b \in B$ gilt $a + \overline{a}b = a + b$.

---

5. Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$ eine Boolsche Algebra und sei $F = x_1 + (x_2 \cdot \sim (x_1))$ ein Boolscher Ausdruck. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f \colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

B. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f \colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

C. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f \colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

D. F ist kein algebraischer Ausdruck.

E. F ist äquivalent zur Boolschen Funktion $f \colon B^2 \to B$ mit

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

---

6. Welche der folgenden Aussagen zu Normalformen einer aussagenlogischen Formeln A ist richtig?

A. Jede disjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Atomen.

B. Jede konjunktive Normalform von A ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

C. Jede Formel A besitzt eine disjunktive, nicht jedoch eine konjunktive Normalform.

D. Jede Formel A besitzt eine konjunktive, nicht jedoch eine disjunktive Normalform.

E. Jede Formel A besitzt sowohl eine konjunktive wie eine disjunktive Normalform.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaften Erfüllbarkeit und Tautologie.

$$((\neg A \vee B) \wedge \neg((C \wedge D) \vee \neg E)) \rightarrow (\neg(C \wedge D) \wedge E)$$

`[16 Punkte]`

---

8. Algebra: Sei E die folgende Menge von Gleichungen über der Signatur $\mathsf{F} = \{+, \mathsf{s}, \mathsf{0}\}$, wobei die Stelligkeit von $+$ zwei, die Stelligkeit von s eins und die Stelligkeit von $\mathsf{0}$ null ist.

$$0 + x = x$$

$$\mathsf{s}(x) + y = \mathsf{s}(x + y)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln der Gleichungslogik, dass

$$E \vdash \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0})) = \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$$

gilt. `[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen: Betrachten Sie die KFG $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, S)$, wobei die Regeln R wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}SA \mid \mathsf{b}SB \mid \mathsf{c} \\ A &\to \mathsf{a} \mid \mathsf{b}B \\ B &\to \mathsf{b} \mid \mathsf{a}A \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Syntaxbaum in Bezug auf G_1 für das Wort `abcaaa` an. `[4 Punkte]`

b) Ist die Grammatik G_1 eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 für die Sprache $\{\mathsf{a}^{2n}\mathsf{c}\mathsf{b}^n \mid n \geq 0\}$ an. `[8 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Beachten Sie die folgende Grammatik

$$G = (\{P, S\}, \{0, 1\}, R, P)$$

mit den Regeln R:

$$P \to 0 \mid 1 \mid S$$
$$S \to 0P0 \mid 1P1$$

a) Ist die von der Grammatik G erzeugte Sprache rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. `[3 Punkte]`

b) Konstruieren Sie eine Turing Maschine, die die Sprache $L(G)$ akzeptiert. `[7 Punkte]`

Betrachten Sie die Turing Maschine

$$T = (\{s, t, r, q_{a1}, q_{a1\sqcup}, q_{a2}, q_{a2\vdash}, q_{b1}, q_{b1\sqcup}, q_{b2}, q_{b2\vdash}, q_c\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

mit δ wie folgt definiert:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$	s	a	$(q_{a1}, \vdash, R)$
s	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}, \vdash\}$	$(r, *, R)$			
q_{a1}	$\sqcup$	$(q_{a1\sqcup}, \sqcup, L)$	q_{a1}	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_{a1}, *, R)$
$q_{a1\sqcup}$	b	$(q_{b2}, \sqcup, L)$	$q_{a1\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}\}$	$(r, *, R)$
q_{b2}	$\vdash$	$(q_{b2\vdash}, \vdash, R)$	q_{b2}	$* \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$	$(q_{b2}, *, L)$
$q_{b2\vdash}$	a	$(q_{a1}, \vdash, R)$	$q_{b2\vdash}$	b	$(q_{b1}, \vdash, R)$
$q_{b2\vdash}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$	$(r, *, R)$			
q_{b1}	$\sqcup$	$(q_{b1\sqcup}, \sqcup, L)$	q_{b1}	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_{b1}, *, R)$
$q_{b1\sqcup}$	a	$(q_{a2}, \sqcup, L)$	$q_{b1\sqcup}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}\}$	$(r, *, R)$
q_{a2}	$\vdash$	$(q_{a2\vdash}, \vdash, R)$	q_{a2}	$* \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$	$(q_{a2}, *, L)$
$q_{a2\vdash}$	b	$(q_{b1}, \vdash, R)$	$q_{a2\vdash}$	c	$(q_c, \vdash, R)$
$q_{a2\vdash}$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$	$(r, *, R)$			
q_c	$\sqcup$	$(t, \sqcup, R)$	q_c	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(r, *, R)$

c) Welche der folgenden Wörter/Mengen von Wörtern werden von der Turing Maschine T akzeptiert?

abcab $\qquad$ $\{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \geq 0\}$ $\qquad$ $\{\mathsf{a}^l\mathsf{b}^k\mathsf{c}\mathsf{a}^k\mathsf{b}^l \mid l, k > 0\}$

Begründen Sie Ihre Antwort. `[6 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “version2”

`Version 1:  F  E  E  F  E  E`