1. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist richtig?

A. Sei L eine Sprache, die von einer RM berechnet wird. Dann kann L nur dann von einer TM berechnet werden, wenn L regulär ist.

B. Für jede Sprache L, die von einer RM akzeptiert wird, existiert ein endlicher Automat, der L akzeptiert.

C. Es gibt Funktionen $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer TM berechenbar sind, die nicht auf einer RM berechenbar sind.

D. Jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die berechenbar auf einer RM ist, kann auch von einer kontextfreien Grammatik berechnet werden.

E. Jede totale Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die in einer beliebigen Programmiersprache implementiert ist, kann auch auf einer RM berechnet werden.

---

2. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist richtig? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_0$

B. $\mathcal{L}_3 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \supsetneq \mathcal{L}_2 \supsetneq \mathcal{L}_1 \supsetneq \mathcal{L}_0 \supsetneq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

---

3. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$, $M = \{1, 11, 101, 111\}$ und $N = \{0, 1\}^*$. Was ist $(L \cap M) \cup N$?

A. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon\}$

B. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, 1, 11, 101, 111\}$

C. $(L \cap M) \cup N = \{\epsilon, 0, 10, 100, 110\}$

D. $(L \cap M) \cup N = \varnothing$

E. $(L \cap M) \cup N = \{0, 1\}^*$

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist falsch, wenn $\mathring{A} = \langle A; \cdot, ! \rangle$ eine Algebra mit $A = \{a, b, c\}$ ist, sodass die Operationen $\cdot$ und ! wie folgt definiert sind:

$\cdot$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	a
c	c	c	a

!	
a	b
b	c
c	a

A. $!(!(x_1)) \approx (!x_1) \cdot (!x_1)$

B. $!(!(x_1)) \approx !(x_1 \cdot x_1)$

C. $x_2 \cdot x_1$ ist ein algebraischer Ausdruck.

D. $x_1 \cdot x_1$ ist ein algebraischer Ausdruck.

E. $!(x)$ ist ein algebraischer Ausdruck.

F. $!(x_1) \approx x_1 \cdot (x_1 \cdot x_1)$

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Algebra ist falsch?

A. Seien A, B Boolesche Ausdrücke und f, g ihre Booleschen Funktionen. Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Algebra der Boolschen Funktionen.

B. Die Algebra der Booleschen Funktionen ist eine Algebra.

C. Jede binäre Operation hat maximal ein neutrales Element.

D. Sei $\mathcal{B}$ eine Boolesche Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a \in B$ gilt $\sim(\sim(a)) = a$.

E. Jede Algebra ist auch eine Boolesche Algebra.

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \vee (q \wedge r) \approx (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

B. $p \vee \neg p \approx \mathsf{True}$.

C. $p \vee p \approx p$.

D. $p \rightarrow \mathsf{False} \approx \neg p$.

E. $\neg\neg p \approx p$.

F. $p \wedge (p \vee q) \approx \neg p$.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaft Unerfüllbarkeit. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Unerfüllbarkeit und Tautologie einer Formel.

$$\neg((A \to B) \land \neg(E \to C \land D) \to (D \to \neg C) \land E)$$

`[16 Punkte]`

---

8. Betrachten Sie die folgende Menge von Gleichungen:

$$E = \{\mathsf{e} \cdot x \approx x, x^{-1} \cdot x \approx \mathsf{e}, (x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z)\}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Inferenzregeln der Gleichungslogik, dass gilt:

$$E \vdash (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e}) \cdot \mathsf{e} \approx (x^{-1} \cdot x) \cdot (\mathsf{e} \cdot \mathsf{e})$$

[16 Punkte]

---

9. Formale Sprachen: Betrachten Sie die Grammatik $G_1 = (\{K\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, K)$, mit folgenden Regeln R:

$$K \to KK \mid \mathsf{a}K\mathsf{b} \mid \mathsf{ab}$$

a) Um welchen Typ von Grammatik handelt es sich bei der Grammatik G_1? Begründen Sie Ihre Antwort. `[3 Punkte]`

b) Geben Sie eine Linksableitung in Bezug auf G_1 für das Wort $\mathsf{aababbab}$ an. `[5 Punkte]`

c) Es sei folgende Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ enthält mindestens drei aufeinanderfolgende } \mathsf{a}\}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G_2 für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Betrachten Sie die folgende Grammatik

$$G = (\{S, P\}, \{0, 1\}, R, S)$$

mit den Regeln R:

$$S \to 0P0 \mid 1P1 \mid 00 \mid 11$$
$$P \to 0P \mid 1P \mid 0 \mid 1$$

a) Ist die von der Grammatik G erzeugte Sprache rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

Betrachten Sie die Turing Maschine $M = (\{s, t, r, q_1, q_2\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt definiert:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$	s	a	$(q_1, \vdash, R)$
s	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}, \vdash\}$	$(r, \sqcup, R)$			
q_2	$\sqcup$	$(t, \sqcup, R)$	q_2	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(r, \sqcup, R)$
q_1	a	$(q_2, \vdash, R)$	q_1	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{a}\}$	$(r, \sqcup, R)$

b) Welche der folgenden Wörter werden von der Turing Maschine M akzeptiert?

aab aa baa

Ist die von der Turing Maschine M akzeptierte Sprache rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antworten. `[4 Punkte]`

c) Konstruieren Sie eine Turing Maschine, welche die Sprache $L(G)$ akzeptiert. Den akzeptierenden Zustand darf sie nur beim linken Endmarker erreichen und nachdem das Band leer ist. `[8 Punkte]`

ANSWERKEY FOR "versionG"

```
Version 1:  E  E  E  F  E  F
```