1. Welche der folgenden Aussagen zu Registermaschinen ist falsch?

A. Alle Registermaschinenprogramme basieren ausschließlich auf drei Befehlen.

B. Registermaschinenprogrammen sind deterministische Programme.

C. Registermaschinen sind Turing-vollständig.

D. Für jede partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, berechenbar auf einer RM R, existiert eine Turingmaschine M, sodass f M-berechenbar.

E. Jede Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die auf einer Turingmaschine berechenbar ist, ist auch auf einer RM berechenbar.

F. Jede RM kann in eine äquivalente kontextsensitive Grammatik umgewandelt werden.

---

2. Welche der folgenden Anordnungen der Chomsky-Hierarchie ist falsch? Zur Erinnerung:

$\mathcal{L}_3 =$ reguläre Sprachen
$\mathcal{L}_2 =$ kontextfreie Sprachen
$\mathcal{L}_1 =$ kontextsensitive Sprachen
$\mathcal{L}_0 =$ rekursiv aufzählbare Sprachen
$\mathcal{L} =$ formale Sprachen

A. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

B. $\mathcal{L}_3 \neq \mathcal{L}_2 \neq \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_0 \neq \mathcal{L}$

C. $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$

D. $\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$

E. $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$

---

3. Betrachten Sie die formalen Sprachen $L = \{\epsilon, \mathsf{ca}, \mathsf{aba}\}$, $M = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ und $N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^*$. Was ist $(LM) \cap N$?

A. $(LM) \cap N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^*$

B. $(LM) \cap N = \varnothing$

C. $(LM) \cap N = \{\epsilon, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cac}, \mathsf{abac}\}$

D. $(LM) \cap N = \{\mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

E. $(LM) \cap N = \{\epsilon, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

F. $(LM) \cap N = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{caa}, \mathsf{cab}, \mathsf{cac}, \mathsf{abaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{abac}\}$

---

4. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wenn $\mathring{A} = \langle A; \cdot, ! \rangle$ eine Algebra mit $A = \{a, b, c\}$ ist, sodass die Operationen $\cdot$ und ! wie folgt definiert sind:

$\cdot$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	a
c	c	c	a

!	
a	b
b	c
c	a

A. $!(!(x_1)) \approx !((!x_1) \cdot (!x_1))$

B. $!(!(x_1)) \approx \ x_1$

C. $(x_2 \cdot !(x_1)) \to \mathsf{True}$ ist ein algebraischer Ausdruck.

D. $\cdot(x_1, x_2, x_3)$ ist ein algebraischer Ausdruck.

E. ! ist ein algebraischer Ausdruck.

F. $!(x_1) \approx \ x_1 \cdot x_1$

---

5. Welche der folgenden Aussagen zur Algebra ist richtig?

A. Seien A, B algebraische Ausdrücke und f, g Funktionen. Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Schaltalgebra.

B. Die Mengenalgebra ist eine Algebra, aber keine Boolesche Algebra

C. Jede binäre Operation hat mindestens ein neutrales Element.

D. Sei $\mathcal{B}$ eine Algebra und sei B die Trägermenge von $\mathcal{B}$. Für alle $a \in B$ gilt $\sim(\sim(a)) = a$.

E. Jede Boolesche Algebra ist eine Algebra.

---

6. Welche der folgenden Äquivalenzen von propositionalen Formeln gilt nicht?

A. $p \wedge \neg p \approx \mathsf{False}$.

B. $p \wedge (\neg p \vee q) \approx p \wedge q$.

C. $p \vee (p \wedge q) \approx p$.

D. $p \rightarrow p \approx \mathsf{True}$.

E. $\neg(p \rightarrow q) \approx p \wedge \neg q$.

F. $p \vee (q \wedge r) \approx (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

---

7. Aussagenlogik: Prüfen Sie folgende aussagenlogische Formel mit Hilfe der Methode von Quine auf die Eigenschaft Unerfüllbarkeit. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Unerfüllbarkeit und Tautologie einer Formel.

$$\neg((A \to B) \to (E \to C \wedge D)) \wedge \neg((D \to \neg C) \wedge E)$$

[16 Punkte]

---

8. Betrachten Sie die folgende Menge von Gleichungen:

$$E = \{x + 0 \approx x, x + y \approx y + x, \mathtt{g}(x) + y \approx \mathtt{g}(x + y)\}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Inferenzregeln der Gleichungslogik, dass gilt:

$$E \vdash \mathtt{g}(\mathtt{g}(0) + \mathtt{g}(0)) \approx \mathtt{g}(\mathtt{g}(\mathtt{g}(0)))$$

`[16 Punkte]`

---

9. Formale Sprachen: Betrachten Sie die Grammatik $G_1 = (\{M\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, M)$, mit folgenden Regeln R:

$$M \rightarrow MM \mid \mathsf{b}M\mathsf{a} \mid \mathsf{ba}$$

a) Um welchen Typ von Grammatik handelt es sich bei der Grammatik G_1? Begründen Sie Ihre Antwort. `[3 Punkte]`

b) Geben Sie eine Linksableitung in Bezug auf G_1 für das Wort bbbaabaa an. `[5 Punkte]`

c) Es sei folgende Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ gegeben:

$$L = \{x \mid x \in \Sigma^* \text{ enthält mindestens drei aufeinanderfolgende } \mathsf{b}\}$$

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik G_2 für die Sprache L an. `[8 Punkte]`

---

10. Berechenbarkeitstheorie: Betrachten Sie die folgende Grammatik

$$G = (\{S, P\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, R, S)$$

mit den Regeln R:

$$S \to \mathsf{b}P\mathsf{b} \mid \mathsf{a}P\mathsf{a} \mid \mathsf{bb} \mid \mathsf{aa}$$
$$P \to \mathsf{b}P \mid \mathsf{a}P \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{a}$$

a) Ist die von der Grammatik G erzeugte Sprache rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort. `[4 Punkte]`

Betrachten Sie die Turing Maschine $M = (\{s, t, r, q_1, q_2\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{a}, \mathsf{b}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt definiert:

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, R)$	s	b	$(q_1, \vdash, R)$
s	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}, \vdash\}$	$(r, \sqcup, R)$			
q_2	$\sqcup$	$(t, \sqcup, R)$	q_2	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(r, \sqcup, R)$
q_1	b	$(q_2, \vdash, R)$	q_1	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}\}$	$(r, \sqcup, R)$

b) Welche der folgenden Wörter werden von der Turing Maschine M akzeptiert?

bb   bba   abb

Ist die von der Turing Maschine M akzeptierte Sprache rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antworten. `[4 Punkte]`

c) Konstruieren Sie eine Turing Maschine, welche die Sprache $L(G)$ akzeptiert. Den akzeptierenden Zustand darf sie nur beim linken Endmarker erreichen und nachdem das Band leer ist. `[8 Punkte]`

ANSWERKEY FOR “versionU”

```
Version 1:  F  E  F  F  E  F
```