



Einführung in die Theoretische Informatik

David Drexel

Alexander Maringele

Julian Fodor

David Obwaller

Alexander Lochmann

Jonas Schöpf

Georg Moser

cbr.uibk.ac.at



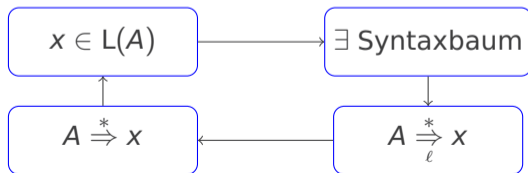
Zusammenfassung

Zusammenfassung der letzten LVA

Satz

Sei Σ ein Alphabet und sei $x \in \Sigma^*$. Die folgenden Beschreibungen kontextfreier Sprachen sind **äquivalent**:

- 1 $x \in L(A)$ nach dem rekursiven Inferenzverfahren
- 2 $A \xRightarrow{*} x$
- 3 $A \xRightarrow[\ell]{*} x$
- 4 Es existiert ein Syntaxbaum mit Wurzel A und Ergebnis x



Satz

Angenommen $A \xRightarrow{*} x$ mit $x \in \Sigma^*$, dann liefert das rekursive Inferenzverfahren, dass $x \in L(A)$

Beweis.

Mit Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $A \xRightarrow{*} x$:

1 Basis Sei $\ell = 1$, dann gilt $x \in L(A)$

2 Schritt Angenommen $\ell = \ell' + 1$

Zunächst können wir die Ableitung $A \xRightarrow{*} x$ wie folgt schreiben:

$$A \Rightarrow X_1 X_2 \cdots X_n \xRightarrow{*} x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Wir verwenden, dass wir die Ableitungen der Sätze x_i aufbrechen können (siehe Woche 8), also gilt:

- Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$
- Wenn $X_i \in V$, dann gilt $X_i \xRightarrow{*} x_i$ und somit $x_i \in L(X_i)$

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, KNF und DNF

Einführung in die Algebra

algebraische Strukturen, Beispiele von Algebren, Zusammenhang Boolesche Algebra und Aussagenlogik, Universelle Algebra, Satz von Birkhoff

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie *und* Komplexitätstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen, $P \neq NP$

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, KNF und DNF

Einführung in die Algebra

algebraische Strukturen, Beispiele von Algebren, Zusammenhang Boolesche Algebra und Aussagenlogik, Universelle Algebra, Satz von Birkhoff

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie *und* Komplexitätstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen, $P \neq NP$

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare



Berechenbarkeitstheorie

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Frage

Ist jedes Problem algorithmisch lösbar?

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Frage

Ist jedes Problem **algorithmisch** lösbar?

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Frage

Ist jedes Problem **algorithmisch** lösbar?

Antwort

Nein

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Frage

Ist jedes Problem **algorithmisch** lösbar?

Antwort

Nein

Ein einfaches Programm

```
main()
{
    printf("hello, world");
}
```

betrachte Programm F:

```
main()
{
  int n, summe = 3, x, y, z;
  scanf(``%d'', &n);
  while (1) {
    for (x=1; x <= summe-2; x++)
      for (y=1; y <= summe-x-1; y++) {
        z = summe - x - y;
        if (pow(x,n) + pow(y,n) == pow(z,n))
          printf("hello, world");
      }
    summe++;
  }
}
```

Beispiel

betrachte Programm F:

```
main()
{
    int n, summe = 3, x, y, z;
    scanf("%d", &n);
    while (1) {
        for (x=1; x <= summe-2; x++)
            for (y=1; y <= summe-x-1; y++) {
                z = summe - x - y;
                if (pow(x,n) + pow(y,n) == pow(z,n))
                    printf("hello, world");
            }
        summe++;
    }
}
```

Das Programm F ist kein „hello, world“-Programm

Beispiel

betrachte Programm G

```
main()
{
    int n, x, y, z, test, summe=4;
    while (1) {
        test = 0;
        for (x=2; x <= summe; x++) {
            y = summe - x;
            if (is_prime(x) && is_prime(y)) test = 1;
        }
        if (!test) printf("hello, world");
        summe = summe + 2;
    }
}
```

Beispiel

betrachte Programm G

```
main()
{
    int n, x, y, z, test, summe=4;
    while (1) {
        test = 0;
        for (x=2; x <= summe; x++) {
            y = summe - x;
            if (is_prime(x) && is_prime(y)) test = 1;
        }
        if (!test) printf("hello, world");
        summe = summe + 2;
    }
}
```

Goldbach'sche Vermutung

Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden

Beispiel

betrachte Programm G

```
main()
{
  int n, x, y, z, test, summe=4;
  while (1) {
    test = 0;
    for (x=2; x <= summe; x++) {
      y = summe - x;
      if (is_prime(x) && is_prime(y)) test = 1;
    }
    if (!test) printf("hello, world");
    summe = summe + 2;
  }
}
```

Das Programm G ist **wahrscheinlich** kein „hello, world“-Programm¹

¹G ist kein „hello, world“-Programm für Zahlen $\leq 10^{17}$

Großer Fermat (1637)



Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für $n > 2$ keine Lösung in \mathbb{N}

Großer Fermat (1637)



Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für $n > 2$ keine Lösung in \mathbb{N}

Vermutung von Goldbach (1742)



Jede gerade Zahl (≥ 2) kann als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden

Großer Fermat (1637)



Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für $n > 2$ keine Lösung in \mathbb{N}

Vermutung von Goldbach (1742)



Jede gerade Zahl (≥ 2) kann als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden

Satz

Es kann kein Testprogramm für „hello, world“-Programme geben

Entscheidbarkeit & Unentscheidbarkeit

Definition (informell)

Ein Problem, das **algorithmisch** nicht lösbar ist, wird **unentscheidbar** genannt; andernfalls heißt das Problem **entscheidbar**

Entscheidbarkeit & Unentscheidbarkeit

Definition (informell)

Ein Problem, das **algorithmisch** nicht lösbar ist, wird **unentscheidbar** genannt; andernfalls heißt das Problem **entscheidbar**

Definition

als **Halteproblem** bezeichnen wir das Problem, ob ein beliebiges Programm auf seiner Eingabe hält

Entscheidbarkeit & Unentscheidbarkeit

Definition (informell)

Ein Problem, das **algorithmisch** nicht lösbar ist, wird **unentscheidbar** genannt; andernfalls heißt das Problem **entscheidbar**

Definition

als **Halteproblem** bezeichnen wir das Problem, ob ein beliebiges Programm auf seiner Eingabe hält

Definition

Postsches Korrespondenzproblem: Gegeben zwei gleich lange Listen von (nicht-leeren) Wörtern w_1, w_2, \dots, w_n und x_1, x_2, \dots, x_n . Gesucht sind Indizes i_1, i_2, \dots, i_m , sodass

$$w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

Satz

Die folgenden Probleme sind *entscheidbar*:

- das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)

Satz

Die folgenden Probleme sind *entscheidbar*:

- das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)
- das Wortproblem der Booleschen Algebra

Satz

Die folgenden Probleme sind *entscheidbar*:

- das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)
- das Wortproblem der Booleschen Algebra
- sei G eine KFG, ist $L(G) = \emptyset$?

Satz

Die folgenden Probleme sind **entscheidbar**:

- das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)
- das Wortproblem der Booleschen Algebra
- sei G eine KFG, ist $L(G) = \emptyset$?
- ...

Satz

Die folgenden Probleme sind **unentscheidbar**:

- das Halteproblem
- das Postsche Korrespondenzproblem

Satz

Die folgenden Probleme sind **entscheidbar**:

- das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT)
- das Wortproblem der Booleschen Algebra
- sei G eine KFG, ist $L(G) = \emptyset$?
- ...

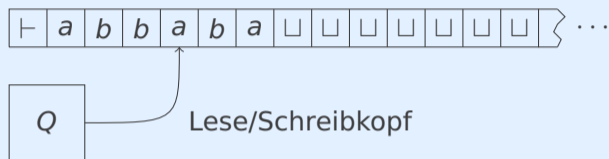
Satz

Die folgenden Probleme sind **unentscheidbar**:

- das Halteproblem
- das Postsche Korrespondenzproblem
- sei G eine KFG über Σ , ist $L(G) = \Sigma^*$?
- ...

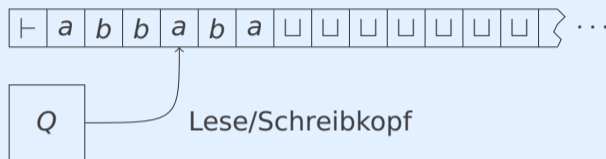
Definition (informell)

deterministische, einbändige Turingmaschine (TM):



Definition (informell)

deterministische, einbändige Turingmaschine (TM):



- Eine TM verwendet ein einseitig unendliches Band als Speicher
- Zu Beginn der Berechnung steht die Eingabe auf dem Band
- Der Speicher wird mit einem **Lese/Schreibkopf** gelesen oder beschrieben
- Das Verhalten der TM wird durch die **endliche Kontrolle** Q kontrolliert

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,
- 5 $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das **Blanksymbol**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,
- 5 $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das **Blanksymbol**,
- 6 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ die **Übergangsfunktion**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,
- 5 $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das **Blanksymbol**,
- 6 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ die **Übergangsfunktion**,
- 7 $s \in Q$, der **Startzustand**,

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,
- 5 $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das **Blanksymbol**,
- 6 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ die **Übergangsfunktion**,
- 7 $s \in Q$, der **Startzustand**,
- 8 $t \in Q$, der **akzeptierende Zustand** und

Definition (formal)

eine **deterministische, einbändige Turingmaschine (TM)** M ist ein 9-Tupel

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$$

sodass

- 1 Q eine endliche Menge von **Zuständen**,
- 2 Σ eine endliche Menge von **Eingabesymbolen**,
- 3 Γ eine endliche Menge von **Bandsymbolen**, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$,
- 4 $\vdash \in \Gamma \setminus \Sigma$, der **linke Endmarker**,
- 5 $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$, das **Blanksymbol**,
- 6 $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ die **Übergangsfunktion**,
- 7 $s \in Q$, der **Startzustand**,
- 8 $t \in Q$, der **akzeptierende Zustand** und
- 9 $r \in Q$, der **verwerfende Zustand** mit $t \neq r$.

Definition (Übergangsfunktion)

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

- 1 M ersetzt a durch b auf dem Band
- 2 der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
- 3 M wechselt in den Zustand q

Definition (Übergangsfunktion)

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

- 1 M ersetzt a durch b auf dem Band
- 2 der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
- 3 M wechselt in den Zustand q

Definition (Zusatzbedingungen)

- Der linke Endmarker darf nicht überschrieben werden

$$\forall p \in Q, \exists q \in Q \quad \delta(p, \vdash) = (q, \vdash, R)$$

Definition (Übergangsfunktion)

die Gleichung $\delta(p, a) = (q, b, d)$ bedeutet: Wenn die TM M im Zustand p das Symbol a liest, dann

- 1 M ersetzt a durch b auf dem Band
- 2 der Lese/Schreibkopf bewegt sich einen Schritt in die Richtung d
- 3 M wechselt in den Zustand q

Definition (Zusatzbedingungen)

- Der linke Endmarker darf nicht überschrieben werden

$$\forall p \in Q, \exists q \in Q \quad \delta(p, \vdash) = (q, \vdash, R)$$

- Wenn die TM akzeptiert/verwirft, bleibt die TM in diesem Zustand

$$\forall b \in \Gamma, \exists c, c' \in \Gamma \text{ und } d, d' \in \{L, R\}: \quad \delta(t, b) = (t, c, d) \\ \delta(r, b) = (r, c', d')$$

Beispiel

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

Beispiel

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	\vdash	(s, \vdash, R)			
s	0	(q_1, X, R)	q_2	0	$(q_2, 0, L)$
s	Y	(q_3, Y, R)	q_2	X	(s, X, R)
			q_2	Y	(q_2, Y, L)
			q_3	\sqcup	(t, \sqcup, R)
q_1	0	$(q_1, 0, R)$			
q_1	1	(q_2, Y, L)			
q_1	Y	(q_1, Y, R)	q_3	Y	(q_3, Y, R)

Beispiel

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	\vdash	(s, \vdash, R)			
s	0	(q_1, X, R)	q_2	0	$(q_2, 0, L)$
s	Y	(q_3, Y, R)	q_2	X	(s, X, R)
			q_2	Y	(q_2, Y, L)
			q_3	\sqcup	(t, \sqcup, R)
q_1	0	$(q_1, 0, R)$			
q_1	1	(q_2, Y, L)			
q_1	Y	(q_1, Y, R)	q_3	Y	(q_3, Y, R)
t	$*$	$(t, *, R)$	r	$*$	$(r, *, R)$

Beispiel

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	\vdash	(s, \vdash, R)	q_2	\vdash	(r, \vdash, R)
s	\sqcup	(r, \sqcup, R)	q_2	\sqcup	(r, \sqcup, R)
s	0	(q_1, X, R)	q_2	0	$(q_2, 0, L)$
s	1	$(r, 1, R)$	q_2	1	$(r, 1, R)$
s	X	(r, X, R)	q_2	X	(s, X, R)
s	Y	(q_3, Y, R)	q_2	Y	(q_2, Y, L)
q_1	\vdash	(r, \vdash, R)	q_3	\vdash	(r, \vdash, R)
q_1	\sqcup	(r, \vdash, R)	q_3	\sqcup	(t, \sqcup, R)
q_1	0	$(q_1, 0, R)$	q_3	0	$(r, 0, R)$
q_1	1	(q_2, Y, L)	q_3	1	$(r, 1, R)$
q_1	X	(r, X, R)	q_3	X	(r, X, R)
q_1	Y	(q_1, Y, R)	q_3	Y	(q_3, Y, R)
t	$*$	$(t, *, R)$	r	$*$	$(r, *, R)$

Konfiguration einer TM

Definition

eine **Konfiguration** einer TM M ist ein Tripel (p, x, n) , sodass

- 1 $p \in Q$ Zustand,
- 2 $x = y \sqcup^{\infty}$ Bandinhalt
- 3 $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

$y \in \Gamma^*$

Konfiguration einer TM

Definition

eine **Konfiguration** einer TM M ist ein Tripel (p, x, n) , sodass

- 1 $p \in Q$ Zustand,
- 2 $x = y \sqcup^\infty$ Bandinhalt
- 3 $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

$y \in \Gamma^*$

Definition

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$: $(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0)$

Konfiguration einer TM

Definition

eine **Konfiguration** einer TM M ist ein Tripel (p, x, n) , sodass

- 1 $p \in Q$ Zustand,
- 2 $x = y \sqcup^\infty$ Bandinhalt
- 3 $n \in \mathbb{N}$ Position des Lese/Schreibkopfes

$y \in \Gamma^*$

Definition

Startkonfiguration bei Eingabe $x \in \Sigma^*$: $(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0)$

Beispiel

Sei 0011 die Eingabe der TM M , dann ist die Startkonfiguration gegeben durch $(s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0)$

Schrittfunktion von TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n - 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, L) \\ (q, z', n + 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, R) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Schrittfunktion von TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n - 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, L) \\ (q, z', n + 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, R) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

Schrittfunktion von TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n - 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, L) \\ (q, z', n + 1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, R) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

$$\mathbf{1} \quad \alpha \xrightarrow[M]{0} \alpha$$

Schrittfunktion von TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, L) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, R) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

1 $\alpha \xrightarrow[M]{0} \alpha$

2 $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für Konfiguration γ

Schrittfunktion von TMs

Definition

Relation $\xrightarrow[M]{1}$ ist wie folgt definiert:

$$(p, z, n) \xrightarrow[M]{1} \begin{cases} (q, z', n-1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, L) \\ (q, z', n+1) & \text{wenn } \delta(p, z_n) = (q, b, R) \end{cases}$$

z' ist String, den wir aus z erhalten, wenn z_n durch b ersetzt

Definition

reflexive, transitive Hülle $\xrightarrow[M]{*}$:

1 $\alpha \xrightarrow[M]{0} \alpha$

2 $\alpha \xrightarrow[M]{n+1} \beta$, wenn $\alpha \xrightarrow[M]{n} \gamma \xrightarrow[M]{1} \beta$ für Konfiguration γ

3 $\alpha \xrightarrow[M]{*} \beta$, wenn $\exists n \alpha \xrightarrow[M]{n} \beta$

Beispiel (Wiederholung)

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

Beispiel (Wiederholung)

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	\vdash	(s, \vdash, R)	q_2	\vdash	(r, \vdash, R)
s	\sqcup	(r, \sqcup, R)	q_2	\sqcup	(r, \sqcup, R)
s	0	(q_1, X, R)	q_2	0	$(q_2, 0, L)$
s	1	$(r, 1, R)$	q_2	1	$(r, 1, R)$
s	X	(r, X, R)	q_2	X	(s, X, R)
s	Y	(q_3, Y, R)	q_2	Y	(q_2, Y, L)
q_1	\vdash	(r, \vdash, R)	q_3	\vdash	(r, \vdash, R)
q_1	\sqcup	(r, \vdash, R)	q_3	\sqcup	(t, \sqcup, R)
q_1	0	$(q_1, 0, R)$	q_3	0	$(r, 0, R)$
q_1	1	(q_2, Y, L)	q_3	1	$(r, 1, R)$
q_1	X	(r, X, R)	q_3	X	(r, X, R)
q_1	Y	(q_1, Y, R)	q_3	Y	(q_3, Y, R)
t	$*$	$(t, *, R)$	r	$*$	$(r, *, R)$

Beispiel (Wiederholung)

sei $M = (\{s, t, r, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{\vdash, \sqcup, 0, 1, X, Y\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
s	\vdash	(s, \vdash, R)			
s	0	(q_1, X, R)	q_2	0	$(q_2, 0, L)$
s	Y	(q_3, Y, R)	q_2	X	(s, X, R)
			q_2	Y	(q_2, Y, L)
			q_3	\sqcup	(t, \sqcup, R)
q_1	0	$(q_1, 0, R)$			
q_1	1	(q_2, Y, L)			
q_1	Y	(q_1, Y, R)	q_3	Y	(q_3, Y, R)

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$(s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1)$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$(s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2)$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 1) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (s, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (s, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash XXY1 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash XXY1 \sqcup^\infty, 4) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 4) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 5) \xrightarrow[M]{1} (t, \vdash XXY Y \sqcup \sqcup^\infty, 6) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir betrachten die Schrittfunktion für eine akzeptierende Berechnung von M bei Eingabe 0011:

$$\begin{aligned} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 0) &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash 0011 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash X011 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 1) \xrightarrow[M]{1} (s, \vdash X0Y1 \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash XXY1 \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_1, \vdash XXY1 \sqcup^\infty, 4) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_2, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 2) \\ &\xrightarrow[M]{1} (s, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 3) \xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 4) \\ &\xrightarrow[M]{1} (q_3, \vdash XXY Y \sqcup^\infty, 5) \xrightarrow[M]{1} (t, \vdash XXY Y \sqcup \sqcup^\infty, 6) \end{aligned}$$

Definition

eine TM M

- **akzeptiert** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

- **verwirft** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$

Definition

eine TM M

- **akzeptiert** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, y, n)$$

- **verwirft** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (r, y, n)$$

- **hält** bei Eingabe x , wenn x akzeptiert oder verworfen
- **hält nicht** bei Eingabe x , wenn x weder akzeptiert, noch verworfen

Definition

eine TM M

- **akzeptiert** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow_M^* (t, y, n)$$

- **verwirft** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow_M^* (r, y, n)$$

- **hält** bei Eingabe x , wenn x akzeptiert oder verworfen
- **hält nicht** bei Eingabe x , wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist **total**, wenn M auf **allen** Eingaben hält

Definition

eine TM M

- **akzeptiert** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow_M^* (t, y, n)$$

- **verwirft** $x \in \Sigma^*$, wenn $\exists y, n$:

$$(s, \vdash x \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow_M^* (r, y, n)$$

- **hält** bei Eingabe x , wenn x akzeptiert oder verworfen
- **hält nicht** bei Eingabe x , wenn x weder akzeptiert, noch verworfen
- ist **total**, wenn M auf **allen** Eingaben hält

Definition

die **Sprache** einer TM M ist wie folgt definiert:

$$L(M) := \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x\}$$

Satz

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L **rekursiv aufzählbar**

Satz

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L **rekursiv aufzählbar**

Folgerung

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird, dann existiert eine Grammatik G , sodass $L = L(G)$

Satz

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L **rekursiv aufzählbar**

Folgerung

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird, dann existiert eine Grammatik G , sodass $L = L(G)$

Definition (Berechenbarkeit mit einer TM)

- Sei $M = (Q, \{\sqcup, \square\}, \{\vdash, \sqcup, \sqcap, \square\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$

Satz

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L **rekursiv aufzählbar**

Folgerung

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird, dann existiert eine Grammatik G , sodass $L = L(G)$

Definition (Berechenbarkeit mit einer TM)

- Sei $M = (Q, \{\sqcap, \square\}, \{\vdash, \sqcup, \sqcap, \square\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$
- Eine partielle Funktion $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **M -berechenbar**, wenn:

$$f(n_1, \dots, n_k) = m \quad \text{gdw.} \quad (s, \vdash \sqcap^{n_1} \square \dots \square \sqcap^{n_k} \sqcup^\infty, 0) \\ \xrightarrow[M]{*} (t, \vdash \sqcap^m \sqcup^\infty, n)$$

Satz

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L **rekursiv aufzählbar**

Folgerung

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird, dann existiert eine Grammatik G , sodass $L = L(G)$

Definition (Berechenbarkeit mit einer TM)

- Sei $M = (Q, \{\sqcup, \square\}, \{\vdash, \sqcup, \sqcap, \square\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$
- Eine partielle Funktion $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **M -berechenbar**, wenn:
$$f(n_1, \dots, n_k) = m \quad \text{gdw.} \quad (s, \vdash \sqcap^{n_1} \square \dots \square \sqcap^{n_k} \sqcup^\infty, 0) \xrightarrow[M]{*} (t, \vdash \sqcap^m \sqcup^\infty, n)$$
- Eine partielle Funktion $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **berechenbar mit einer TM**, wenn eine TM M über dem Alphabet $\{\sqcup, \square\}$ existiert, sodass f M -berechenbar

Frohe Feiertage & Guten Rutsch