



Einführung in die Theoretische Informatik

David Drexel

Alexander Maringele

Julian Fodor

David Obwaller

Alexander Lochmann

Jonas Schöpf

Georg Moser

cbr.uibk.ac.at



Zusammenfassung

Zusammenfassung der letzten LVA

Lemma

Jede binäre Operation hat maximal ein neutrales Element und wenn $\mathcal{A} = \langle A; \circ, 1 \rangle$ ein Monoid ist, dann ist das Inverse eindeutig

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Algebra $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$ heißt **Boolesche Algebra** wenn gilt:

- 1 $\langle B; +, 0 \rangle$ und $\langle B; \cdot, 1 \rangle$ sind kommutative Monoide
- 2 Die Operationen $+$ und \cdot distribuieren übereinander. Es gilt also für alle $a, b, c \in B$:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

- 3 Für alle $a \in B$ gilt

$$a + \sim(a) = 1 \quad a \cdot \sim(a) = 0$$

Das Element $\sim(a)$ heißt das **Komplement** oder die **Negation** von a

Definition

Sei Abb die Menge der Abbildungen von \mathbb{B}^n nach \mathbb{B}^m wir betrachten

$$\langle \text{Abb}; +, \cdot, \sim, (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}) \rangle$$

$$\mathbf{1} \quad (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}): (a_1, \dots, a_n) \mapsto (0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{2} \quad (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}): (a_1, \dots, a_n) \mapsto (1, \dots, 1)$$

$$\mathbf{3} \quad (f + g)(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{4} \quad (f \cdot g)(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) \cdot g(a_1, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{5} \quad \sim(f)(a_1, \dots, a_n) = \sim(f(a_1, \dots, a_n))$$

Diese Algebra nennt man **Algebra der Schaltfunktionen** oder **n -stelligen Booleschen Funktionen**

Lemma

Die Algebra der Schaltfunktionen ist eine Boolesche Algebra

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, Universelle Algebra, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Inhalte der Lehrveranstaltung

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Boolesche Algebra, **Universelle Algebra**, Logische Schaltkreise

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Gesetze Boolescher Algebren

die noch nicht in Rechnerarchitektur behandelt wurden

Lemma ①

Für alle $a, b \in B$ gilt die **Eindeutigkeit des Komplements**:

Wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \sim(a)$

Gesetze Boolescher Algebren

die noch nicht in Rechnerarchitektur behandelt wurden

Lemma ①

Für alle $a, b \in B$ gilt die **Eindeutigkeit des Komplements**:

Wenn $a + b = 1$ und $ab = 0$, dann $b = \sim(a)$

Beweis.

Gelte $a + b = 1$ und $ab = 0$

$$\begin{aligned} b &= b1 = b(a + \sim(a)) = ba + b \cdot \sim(a) = 0 + b \cdot \sim(a) && \text{da } ab = 0 \\ &= a \cdot \sim(a) + b \cdot \sim(a) = (a + b) \cdot \sim(a) = 1 \cdot \sim(a) && \text{da } a + b = 1 \\ &= \sim(a) \end{aligned}$$

Lemma

Für alle $a \in B$ gilt das *Involutionsgesetz*:

$$\sim(\sim(a)) = a$$

Lemma

Für alle $a \in B$ gilt das *Involutionsgesetz*:

$$\sim(\sim(a)) = a$$

Beweis.

Nach Definition einer Booleschen Algebra und Kommutativität von $+$ beziehungsweise \cdot gilt:

1 $\sim(a) + a = 1$

2 $\sim(a) \cdot a = 0$

Mit Lemma ① folgt, dass a das Komplement von $\sim(a)$ ist ■

Lemma

Für alle $a \in B$ gilt das *Involutionsgesetz*:

$$\sim(\sim(a)) = a$$

Beweis.

Nach Definition einer Booleschen Algebra und Kommutativität von $+$ beziehungsweise \cdot gilt:

$$\mathbf{1} \quad \sim(a) + a = 1$$

$$\mathbf{2} \quad \sim(a) \cdot a = 0$$

Mit Lemma ① folgt, dass a das Komplement von $\sim(a)$ ist ■

Lemma

Für alle $a, b \in B$ gelten die *Gesetze von de Morgan*:

$$\sim(a + b) = \sim(a) \cdot \sim(b) \quad \sim(a \cdot b) = \sim(a) + \sim(b)$$

Erstes Gesetz von de Morgan.

- Wir zeigen $(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 1$:

$$\begin{aligned}(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) &= (a + b + \sim(a))(a + b + \sim(b)) \\ &= (a + \sim(a) + b)(a + b + \sim(b)) \\ &= (1 + b)(a + 1) \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Erstes Gesetz von de Morgan.

- Wir zeigen $(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 1$:

$$\begin{aligned}(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) &= (a + b + \sim(a))(a + b + \sim(b)) \\ &= (a + \sim(a) + b)(a + b + \sim(b)) \\ &= (1 + b)(a + 1) \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

- Wir zeigen $(a + b) \cdot (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 0$:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + b \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) \\ &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot b \cdot \sim(b) \\ &= 0 \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot 0 \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Erstes Gesetz von de Morgan.

- Wir zeigen $(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 1$:

$$\begin{aligned}(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) &= (a + b + \sim(a))(a + b + \sim(b)) \\ &= (a + \sim(a) + b)(a + b + \sim(b)) \\ &= (1 + b)(a + 1) \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

- Wir zeigen $(a + b) \cdot (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 0$:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + b \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) \\ &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot b \cdot \sim(b) \\ &= 0 \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot 0 \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

- Die Voraussetzungen von Lemma ① sind gezeigt

Erstes Gesetz von de Morgan.

- Wir zeigen $(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 1$:

$$\begin{aligned}(a + b) + (\sim(a) \cdot \sim(b)) &= (a + b + \sim(a))(a + b + \sim(b)) \\ &= (a + \sim(a) + b)(a + b + \sim(b)) \\ &= (1 + b)(a + 1) \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

- Wir zeigen $(a + b) \cdot (\sim(a) \cdot \sim(b)) = 0$:

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + b \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) \\ &= a \cdot \sim(a) \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot b \cdot \sim(b) \\ &= 0 \cdot \sim(b) + \sim(a) \cdot 0 \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

- Die Voraussetzungen von Lemma ① sind gezeigt
- Somit ist $\sim(a) \cdot \sim(b)$ das Komplement von $a + b$

Definition (Boolesche Funktion)

- 1 Sei F ein Boolescher Ausdruck in den Variablen x_1, \dots, x_n
- 2 $F(s_1, \dots, s_n)$ die Instanz von F
- 3 Wir definieren die Funktion $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ wie folgt:

$$f(s_1, \dots, s_n) := F(s_1, \dots, s_n) .$$

Dann heißt f die **Boolesche Funktion** zum Ausdruck F

Definition (Boolesche Funktion)

- 1 Sei F ein Boolescher Ausdruck in den Variablen x_1, \dots, x_n
- 2 $F(s_1, \dots, s_n)$ die Instanz von F
- 3 Wir definieren die Funktion $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ wie folgt:

$$f(s_1, \dots, s_n) := F(s_1, \dots, s_n).$$

Dann heißt f die **Boolesche Funktion** zum Ausdruck F

Beispiel (Boolesche Algebra $\mathcal{Frm} = \langle \text{Frm}; \vee, \wedge, \neg, \text{False}, \text{True} \rangle$)

Sei $F = x_1 \wedge \neg(x_2 \vee x_1)$, dann ist $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$
die Boolesche Funktion zu F

Sei $G = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2$, dann ist $g: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$
die Boolesche Funktion zu G

s_1	s_2	$f(s_1, s_2)$	$g(s_1, s_2)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Definition

- 1 Sei $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ eine Boolesche Funktion
- 2 Sei F ein Boolescher Ausdruck, dessen Boolesche Funktion gleich f

Dann nennen wir F den **Booleschen Ausdruck** von f

Definition

- 1 Sei $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ eine Boolesche Funktion
- 2 Sei F ein Boolescher Ausdruck, dessen Boolesche Funktion gleich f

Dann nennen wir F den **Booleschen Ausdruck** von f

Satz (Darstellungssatz von Stone)

Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra

Definition

- 1 Sei $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ eine Boolesche Funktion
- 2 Sei F ein Boolescher Ausdruck, dessen Boolesche Funktion gleich f

Dann nennen wir F den **Booleschen Ausdruck** von f

Satz (Darstellungssatz von Stone)

Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra

Satz

- 1 Seien A, B Boolesche Ausdrücke
- 2 Seien f, g ihre Booleschen Funktionen

Dann gilt $A \approx B$ gdw. $f = g$ in der Algebra der Booleschen Funktionen

Definition (Signatur)

- Eine **Signatur** F ist eine Menge von **Funktionssymbolen** (Symbolen für Operationen)
- Jedem $f \in F$ ist eine **Stelligkeit** n zugeordnet
- Symbole mit Stelligkeit 0 werden **Konstanten** genannt

Definition (Signatur)

- Eine **Signatur** F ist eine Menge von **Funktionssymbolen** (Symbolen für Operationen)
- Jedem $f \in F$ ist eine **Stelligkeit** n zugeordnet
- Symbole mit Stelligkeit 0 werden **Konstanten** genannt

Sei F eine Signatur und sei V eine (unendliche) Menge von **Variablen**

Definition (Signatur)

- Eine **Signatur** F ist eine Menge von **Funktionssymbolen** (Symbolen für Operationen)
- Jedem $f \in F$ ist eine **Stelligkeit** n zugeordnet
- Symbole mit Stelligkeit 0 werden **Konstanten** genannt

Sei F eine Signatur und sei V eine (unendliche) Menge von **Variablen**

Definition (Terme)

Die Menge $T(F, V)$ aller **Terme (über F)** ist induktiv definiert:

- 1 Jedes Element von V ist ein Term
- 2 Wenn $f \in F$ mit Stelligkeit n sowie t_1, \dots, t_n Terme, dann ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term

Definition (Substitution)

- Eine **Substitution** ist eine Abbildung $\sigma: V \rightarrow T(F, V)$
- $\{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$ ist **Definitionsbereich** $\text{dom}(\sigma)$ von σ
- Wenn $\text{dom}(\sigma) = \{x_1, \dots, x_n\}$ können wir schreiben:

$$\sigma = \{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \dots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}$$

- Wir definieren den **Wertebereich** von σ

$$\text{range}(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in \text{dom}(\sigma)\}$$

Definition (Substitution)

- Eine **Substitution** ist eine Abbildung $\sigma: V \rightarrow T(F, V)$
- $\{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$ ist **Definitionsbereich** $\text{dom}(\sigma)$ von σ
- Wenn $\text{dom}(\sigma) = \{x_1, \dots, x_n\}$ können wir schreiben:

$$\sigma = \{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \dots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}$$

- Wir definieren den **Wertebereich** von σ

$$\text{range}(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in \text{dom}(\sigma)\}$$

Beispiel

Sei $F = \{\sim, \cdot, +, 0, 1\}$ eine Signatur und sei $V = \{x_1, x_2, \dots\}$; betrachte

$$x_1 \quad x_2 \quad \sim(x_3) \quad x_4 \quad x_1 \cdot x_2 \quad x_2 \cdot (x_3 + x_4) \quad x_1 \cdot \sim((x_3 + x_4))$$

$$\sigma = \{x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_3 + x_4\} \quad (x_1 \cdot x_2)\sigma = x_2 \cdot (x_3 + x_4)$$

Gleichungen und Gleichungslogik

Definition

Substitution σ kann zur Abbildung $\bar{\sigma}: T(F, V) \rightarrow T(F, V)$ erweitert werden:

$$\bar{\sigma}(t) := \begin{cases} \sigma(t) & \text{wenn } t \in V \\ f(\bar{\sigma}(t_1), \dots, \bar{\sigma}(t_n)) & \text{wenn } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Gleichungen und Gleichungslogik

Definition

Substitution σ kann zur Abbildung $\bar{\sigma}: T(F, V) \rightarrow T(F, V)$ erweitert werden:

$$\bar{\sigma}(t) := \begin{cases} \sigma(t) & \text{wenn } t \in V \\ f(\bar{\sigma}(t_1), \dots, \bar{\sigma}(t_n)) & \text{wenn } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Fakt

Die Anwendung (der Erweiterung) einer Substitution auf einen Term ersetzt simultan alle Variablen im Definitionsbereich durch ihr Bild.

Gleichungen und Gleichungslogik

Definition

Substitution σ kann zur Abbildung $\bar{\sigma}: T(F, V) \rightarrow T(F, V)$ erweitert werden:

$$\bar{\sigma}(t) := \begin{cases} \sigma(t) & \text{wenn } t \in V \\ f(\bar{\sigma}(t_1), \dots, \bar{\sigma}(t_n)) & \text{wenn } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Fakt

Die Anwendung (der Erweiterung) einer Substitution auf einen Term ersetzt simultan alle Variablen im Definitionsbereich durch ihr Bild.

Konvention

Wir bezeichnen die Erweiterung $\bar{\sigma}$ einer Substitution σ , wiederum mit σ

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder **Identitäten**)

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$[r] \quad \overline{E \vdash t \approx t}$$

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$[r] \quad \overline{E \vdash t \approx t}$$

$$[s] \quad \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s}$$

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$[r] \quad \overline{E \vdash t \approx t}$$

$$[s] \quad \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s}$$

$$[t] \quad \frac{E \vdash s \approx t \quad E \vdash t \approx u}{E \vdash s \approx u}$$

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$[r] \quad \overline{E \vdash t \approx t}$$

$$[t] \quad \frac{E \vdash s \approx t \quad E \vdash t \approx u}{E \vdash s \approx u}$$

$$[s] \quad \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s}$$

$$[a] \quad \frac{s \approx t \in E}{E \vdash s \approx t}$$

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$\begin{array}{ll} \text{[r]} & \overline{E \vdash t \approx t} \\ \text{[s]} & \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s} \\ \text{[t]} & \frac{E \vdash s \approx t \quad E \vdash t \approx u}{E \vdash s \approx u} \\ \text{[a]} & \frac{s \approx t \in E}{E \vdash s \approx t} \\ \text{[i]} & \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash \sigma(s) \approx \sigma(t)} \quad \sigma \text{ eine Substitution} \end{array}$$

Definition (Gleichung)

Eine **Gleichung über der Signatur F** ist ein Paar $s \approx t$ von Termen

Sei E eine Menge von Gleichungen (oder Identitäten)

Definition (Gleichungslogik)

$$[r] \quad \overline{E \vdash t \approx t} \qquad [s] \quad \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash t \approx s}$$

$$[t] \quad \frac{E \vdash s \approx t \quad E \vdash t \approx u}{E \vdash s \approx u} \qquad [a] \quad \frac{s \approx t \in E}{E \vdash s \approx t}$$

$$[i] \quad \frac{E \vdash s \approx t}{E \vdash \sigma(s) \approx \sigma(t)} \quad \sigma \text{ eine Substitution}$$

$$[k] \quad \frac{E \vdash s_1 \approx t_1 \quad \dots \quad E \vdash s_n \approx t_n}{E \vdash f(s_1, \dots, s_n) \approx f(t_1, \dots, t_n)}$$

1 Wir betrachten die Signatur

$$F = \{+, s, 0\}$$

Stelligkeit von 0 ist 0, Stelligkeit von s ist 1, Stelligkeit von + ist 2 und wir schreiben + oft in Infix

- 1 Wir betrachten die **Signatur**

$$F = \{+, s, 0\}$$

Stelligkeit von 0 ist 0, Stelligkeit von s ist 1, Stelligkeit von + ist 2 und wir schreiben + oft in Infix

- 2 Wir betrachten die Menge von **Variablen** $V = \{x, y\}$

- 1 Wir betrachten die **Signatur**

$$F = \{+, s, 0\}$$

Stelligkeit von 0 ist 0, Stelligkeit von s ist 1, Stelligkeit von + ist 2 und wir schreiben + oft in Infix

- 2 Wir betrachten die Menge von **Variablen** $V = \{x, y\}$

- 3 Die folgenden Ausdrücke sind Terme in $T(F, V)$

$$x \quad +(x, y) \quad +(s(x), y) \quad 0+s(y)$$

- 1 Wir betrachten die **Signatur**

$$F = \{+, s, 0\}$$

Stelligkeit von 0 ist 0, Stelligkeit von s ist 1, Stelligkeit von + ist 2 und wir schreiben + oft in Infix

- 2 Wir betrachten die Menge von **Variablen** $V = \{x, y\}$

- 3 Die folgenden Ausdrücke sind Terme in $T(F, V)$

$$x \quad +(x, y) \quad +(s(x), y) \quad 0+s(y)$$

- 4 Wir betrachten das Paar von Termen $(s(s(0) + s(0)), s(s(s(0))))$ und schreiben dieses:

$$s(s(0) + s(0)) \approx s(s(s(0))) \tag{1}$$

Dann ist (1) eine **Gleichung**

Beispiel

Wir betrachten die Abbildung $\sigma: V \rightarrow T(F, V)$

$$\sigma(z) = \begin{cases} x+y & z = x \\ z & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Wir betrachten die Abbildung $\sigma: V \rightarrow T(F, V)$

$$\sigma(z) = \begin{cases} x+y & z = x \\ z & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion σ ist eine **Substitution** mit Wertebereich $\text{dom}(\sigma) = \{x\}$

Beispiel

Wir betrachten die Abbildung $\sigma: V \rightarrow T(F, V)$

$$\sigma(z) = \begin{cases} x+y & z = x \\ z & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion σ ist eine **Substitution** mit Wertebereich $\text{dom}(\sigma) = \{x\}$

Beispiel

Wir betrachten die Menge der **Identitäten** E

$$0+x \approx x \quad s(x)+y \approx s(x+y)$$

Dann gilt $E \vdash s(s(0) + s(0)) \approx s(s(s(0)))$

Gleichungen für Boolesche Ausdrücke

Beispiel

Gleichungen für Boolesche Ausdrücke

Beispiel

1 Wir betrachten die folgende Signatur

$$F = \{\sim, +, 0, 1\}$$

sodass

- Stelligkeit von 0, 1 ist 0
- Stelligkeit von \sim ist 1
- Stelligkeit von $+$ ist 2

Gleichungen für Boolesche Ausdrücke

Beispiel

- 1 Wir betrachten die folgende Signatur

$$F = \{\sim, +, 0, 1\}$$

sodass

- Stelligkeit von 0, 1 ist 0
- Stelligkeit von \sim ist 1
- Stelligkeit von $+$ ist 2

- 2 $V = \{x_1, x_2, \dots\}$

Gleichungen für Boolesche Ausdrücke

Beispiel

- 1 Wir betrachten die folgende Signatur

$$F = \{\sim, +, 0, 1\}$$

sodass

- Stelligkeit von $0, 1$ ist 0
- Stelligkeit von \sim ist 1
- Stelligkeit von $+$ ist 2

- 2 $V = \{x_1, x_2, \dots\}$

- 3 Wir betrachten die Identitäten E

$$(x + y) + z \approx x + (y + z) \quad \sim(x) + x \approx 1 \quad x + x \approx x$$

Gleichungen für Boolesche Ausdrücke

Beispiel

- 1 Wir betrachten die folgende Signatur

$$F = \{\sim, +, 0, 1\}$$

sodass

- Stelligkeit von $0, 1$ ist 0
- Stelligkeit von \sim ist 1
- Stelligkeit von $+$ ist 2

- 2 $V = \{x_1, x_2, \dots\}$

- 3 Wir betrachten die Identitäten E

$$(x + y) + z \approx x + (y + z) \quad \sim(x) + x \approx 1 \quad x + x \approx x$$

- 4 Dann gilt $E \vdash 1 + x \approx 1$

Beispiel (Fortsetzung)

Zunächst betrachten wir die folgende „Herleitung“ der Gleichung:

$$1+x \approx (\sim(x)+x)+x \approx \sim(x) + (x+x) \approx \sim(x) + x \approx 1$$

Beispiel (Fortsetzung)

Zunächst betrachten wir die folgende „Herleitung“ der Gleichung:

$$1+x \approx (\sim(x)+x)+x \approx \sim(x) + (x+x) \approx \sim(x) + x \approx 1$$

Formal in der Gleichungslogik:

$$\frac{E \vdash 1+x \approx (\overset{\textcircled{1}}{\sim(x)+x})+x \quad E \vdash (\overset{\textcircled{2}}{\sim(x)+x})+x \approx 1}{E \vdash 1+x \approx 1} [t]$$

Beispiel (Fortsetzung)

Zunächst betrachten wir die folgende „Herleitung“ der Gleichung:

$$1+x \approx (\sim(x)+x)+x \approx \sim(x) + (x+x) \approx \sim(x) + x \approx 1$$

Formal in der Gleichungslogik:

$$\frac{E \vdash 1+x \approx (\sim(x)+x)+x \quad E \vdash (\sim(x)+x)+x \approx 1}{E \vdash 1+x \approx 1} \text{ [t]}$$

Wir betrachten ①:

$$\frac{\frac{\frac{\sim(x)+x \approx 1 \in E}{E \vdash \sim(x)+x \approx 1} \text{ [a]}}{E \vdash 1 \approx \sim(x)+x} \text{ [s]} \quad \frac{}{E \vdash x \approx x} \text{ [r]}}{E \vdash 1+x \approx (\sim(x)+x)+x} \text{ [k]}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir skizzieren ②:

$$\frac{E \vdash (\overset{\textcircled{3}}{\sim(x)+x})+x \approx \sim(x)+(x+x) \quad E \vdash \overset{\textcircled{4}}{\sim(x)+(x+x)} \approx 1}{E \vdash (\sim(x)+x)+x \approx 1} \quad [t]$$