universität innsbruck

Einführung in die Theoretische Informatik

David Drexel
Julian Fodor
Alexander Lochmann
Georg Moser
Alexander Maringele
David Obwaller
Jonas Schöpf

cbr.uibk.ac.at

Zusammenfassung

Zusammenfassung der letzten LVA

Beispiel

1. Wir betrachten die folgende Signatur $\mathsf{F} = \{\overline{}, \cdot, +, 0, 1\}$ sodass
   - Stelligkeit von 0, 1 ist 0
   - Stelligkeit von $\overline{}$ ist 1
   - Stelligkeit von $+, \cdot$ ist 2
2. $\mathsf{V} = \{x_1, x_2, \dots\}$
3. Wir betrachten die Identitäten E

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \bar{x} + x = 1 \qquad x + x = x$$

4. Dann gilt $E \vdash 1 + x = 1$

Satz (Satz von Birkhoff)

Für beliebige Terme s, t gilt $E \models s \approx t$ gdw. $E \vdash s \approx t$

Wortmonoid

Beispiel

- Betrachten Sie D, die Sprache aller Dezimalzahlen mit optionalem Vorzeichen, wobei ganze Zahlen mit zumindest einer 0 hinter dem Dezimalpunkt dargestellt werden.
- Beschreiben Sie informell, welche Wörter in $\sim D$ enthalten sind.

Wortmonoid

Beispiel

- Betrachten Sie D, die Sprache aller Dezimalzahlen mit optionalem Vorzeichen, wobei ganze Zahlen mit zumindest einer 0 hinter dem Dezimalpunkt dargestellt werden.
- Beschreiben Sie informell, welche Wörter in $\sim D$ enthalten sind.

Antwort

$\Sigma = \{+, -, ., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$V = \{+, -, \epsilon\}$$
$$Z = \{0, 1, \ldots, 9\}$$
$$D = VZ^+.Z^+$$

$\sim D$ hängt von der Wahl von Σ ab

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

algebraische Strukturen, Beispiele von Algebren, Zusammenhang Boolesche Algebra und Aussagenlogik, Universelle Algebra, Satz von Birkhoff

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

algebraische Strukturen, Beispiele von Algebren, Zusammenhang Boolesche Algebra und Aussagenlogik, Universelle Algebra, Satz von Birkhoff

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Formale Sprachen

Definition

Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine formale Sprache über Alphabet Σ

Formale Sprachen

Definition

Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine formale Sprache über Alphabet Σ

Beispiel

- Die Sprache aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$:

$$\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \cdots\}$$

Formale Sprachen

Definition

Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine formale Sprache über Alphabet Σ

Beispiel

- Die Sprache aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$:
$$\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \cdots\}$$
- Die Menge der Wörter, die jeweils die selbe Anzahl 0en und 1er enthalten:
$$\{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, \cdots\}$$

Formale Sprachen

Definition

Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine formale Sprache über Alphabet Σ

Beispiel

- Die Sprache aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$:

$$\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \cdots\}$$

- Die Menge der Wörter, die jeweils die selbe Anzahl 0en und 1er enthalten:

$$\{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, \cdots\}$$

- Σ^* ist eine Sprache, $\varnothing$—die leere Sprache—ist eine Sprache, $\{\epsilon\}$ ist eine Sprache. Beachte $\{\epsilon\} \neq \varnothing$

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

- Die Vereinigung von L und M ist wie folgt definiert

$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

- Die Vereinigung von L und M ist wie folgt definiert

$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$

- Wir definieren das Komplement von L:

$$\sim L = \Sigma^* \setminus L := \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$$

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

- Die Vereinigung von L und M ist wie folgt definiert
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
- Wir definieren das Komplement von L:
$$\sim L = \Sigma^* \setminus L := \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$$
- Der Durchschnitt von L und M ist wie folgt definiert:
$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

- Die Vereinigung von L und M ist wie folgt definiert
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
- Wir definieren das Komplement von L:
$$\sim L = \Sigma^* \setminus L := \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$$
- Der Durchschnitt von L und M ist wie folgt definiert:
$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$
- Das Produkt (oder Verkettung) von L und M ist definiert als:
$$LM = \{xy \mid x \in L, y \in M\}$$

Definition

Seien L, M formale Sprachen über dem Alphabet Σ

- Die Vereinigung von L und M ist wie folgt definiert
$$L \cup M = \{x \mid x \in L \text{ oder } x \in M\}$$
- Wir definieren das Komplement von L:
$$\sim L = \Sigma^* \setminus L := \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L\}$$
- Der Durchschnitt von L und M ist wie folgt definiert:
$$L \cap M = \{x \mid x \in L \text{ und } x \in M\}$$
- Das Produkt (oder Verkettung) von L und M ist definiert als:
$$LM = \{xy \mid x \in L, y \in M\}$$

Lemma

Seien L, L_1, L_2, L_3 formale Sprachen, dann gilt
$$(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3) \qquad L\{\epsilon\} = \{\epsilon\}L = L$$

Definition

Sei L eine formale Sprache und $k \in \mathbb{N}$

Die k-te Potenz von L definiert als:

$$L^k = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{falls } k = 0 \\ L & \text{falls } k = 1 \\ \underbrace{LL \cdots L}_{k\text{-mal}} & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$

Definition

Sei L eine formale Sprache und $k \in \mathbb{N}$

Die k-te Potenz von L definiert als:

$$L^k = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{falls } k = 0 \\ L & \text{falls } k = 1 \\ \underbrace{LL\cdots L}_{k\text{-mal}} & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$

Definition

Der Kleene-Stern * oder Abschluss von L ist wie folgt definiert:

$$L^* = \bigcup_{k \geqslant 0} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k \geqslant 0\}$$

Definition

Schließlich definieren wir:

$$L^+ = \bigcup_{k \geqslant 1} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k > 0\}$$

Definition

Schließlich definieren wir:

$$L^+ = \bigcup_{k \geqslant 1} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k > 0\}$$

Beispiel

- Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und betrachte die Sprache L aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$

Definition

Schließlich definieren wir:

$$L^+ = \bigcup_{k \geqslant 1} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k > 0\}$$

Beispiel

- Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und betrachte die Sprache L aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$
- Wir können L konzise in Mengennotation angeben:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$$

Definition

Schließlich definieren wir:

$$L^{+} = \bigcup_{k \geqslant 1} L^{k} = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k > 0\}$$

Beispiel

- Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und betrachte die Sprache L aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$
- Wir können L konzise in Mengennotation angeben:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$$

- Es gilt $010101 \notin L$, aber $010011 \in L^2$

Definition

Schließlich definieren wir:

$$L^+ = \bigcup_{k \geqslant 1} L^k = \{x_1 \cdots x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in L \text{ und } k \in \mathbb{N}, k > 0\}$$

Beispiel

- Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und betrachte die Sprache L aller Wörter, die aus n 0en gefolgt von n 1er bestehen, wobei $n \geqslant 0$
- Wir können L konzise in Mengennotation angeben:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$$

- Es gilt $010101 \notin L$, aber $010011 \in L^2$
- Allgemein erhalten wir etwa:

$$L^2 = \{0^n 1^n 0^k 1^k \mid n, k \geqslant 0\}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\to \mathsf{Pronomen\ Nomen\ Verb\ Adjektiv} \\
\mathsf{Nomen} &\to \mathsf{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\mathsf{Nomen} &\to \mathsf{Vortragender} \\
\mathsf{Pronomen} &\to \mathsf{Unser} \mid \mathsf{Mein} \\
\mathsf{Verb} &\to \mathsf{ist} \\
\mathsf{Adjektiv} &\to \mathsf{lästig} \mid \mathsf{nett} \mid \mathsf{streng} \mid \mathsf{monoton} \mid \mathsf{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\mathsf{S} \overset{*}{\Rightarrow} \mathsf{Unser\ Lehrveranstaltungsleiter\ ist\ anspruchsvoll}$$

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathrm{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathrm{S} \in V$ das Startsymbol von G

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathrm{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathrm{S} \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathsf{S} \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

P nennen wir auch die Prämisse und Q die Konklusion der Regel

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $S \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

P nennen wir auch die Prämisse und Q die Konklusion der Regel

Konvention

- Variablen werden groß geschrieben, Terminale klein
- Statt $P \to Q_1$, $P \to Q_2$, $P \to Q_3$ schreiben wir $P \to Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Definition (Ableitbar)

Wir sagen y ist aus x in G ableitbar, wenn $k \in \mathbb{N}$ und $w_0, w_1, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, sodass

$$x = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = y$$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G **direkt ableitbar**, wenn gilt:
$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$
2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Definition (Ableitbar)

Wir sagen y ist aus x in G **ableitbar**, wenn $k \in \mathbb{N}$ und $w_0, w_1, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, sodass

$$x = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = y$$

Wir schreiben $x \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} y$, beziehungsweise $x \overset{*}{\Rightarrow} y$

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Definition (Sprache einer Grammatik)

Die Menge aller Sätze

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x\}$$

heißt die von der Grammatik G erzeugte Sprache

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Definition (Sprache einer Grammatik)

Die Menge aller Sätze

$$\mathrm{L}(G) = \{x \in \Sigma^* \mid \mathrm{S} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x\}$$

heißt die von der Grammatik G erzeugte Sprache

Zwei Grammatiken G_1 und G_2 heißen äquivalent, wenn $\mathrm{L}(G_1) = \mathrm{L}(G_2)$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Beispiel

- Die Grammatik $G_1 = (\{B\}, \{0, 1\}, R, B)$ ist rechtslinear, wobei R wie folgt definiert:

$$B \to 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B$$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Beispiel

- Die Grammatik $G_1 = (\{B\}, \{0, 1\}, R, B)$ ist rechtslinear, wobei R wie folgt definiert:

$$B \to 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B$$

- Es gilt:

$$\mathrm{L}(G_1) = \{0, 1\}^+$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K)$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K) \Rightarrow ()(KK)$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K) \Rightarrow ()(KK) \stackrel{*}{\Rightarrow} ()(()(()))$$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathrm{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

2. oder $P = \mathrm{S}$ und $Q = \epsilon$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

2. oder $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass
$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$
2. oder $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Beispiel

$G_3 = (\{\mathsf{S}, B, C, H\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, \mathsf{S})$ ist kontextsensitiv, wobei R:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\mathsf{S} & \to & \mathsf{a}\mathsf{S}BC \mid \mathsf{a}BC & HC & \to & BC & \mathsf{b}C & \to & \mathsf{bc} \\
CB & \to & HB & \mathsf{a}B & \to & \mathsf{ab} & \mathsf{c}C & \to & \mathsf{cc} \\
HB & \to & HC & \mathsf{b}B & \to & \mathsf{bb} & & &
\end{array}$$

$\mathrm{L}(G_3) = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid n \geqslant 1\}$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = S$ und $Q = \epsilon$

Wenn $S \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition

Eine formale Sprache L heißt

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextfrei (vom Typ 2)
  wenn $\exists$ kontextfreie Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextfrei (vom Typ 2)
  wenn $\exists$ kontextfreie Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextsensitiv (vom Typ 1)
  wenn $\exists$ kontextsensitive Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- $\mathcal{L}_i$ *die Klasse der Sprachen von Typ* i
- $\mathcal{L}$ *Klasse der formalen Sprachen*

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- $\mathcal{L}_i$ *die Klasse der Sprachen von Typ* i
- $\mathcal{L}$ *Klasse der formalen Sprachen*

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- $\mathcal{L}_i$ *die Klasse der Sprachen von Typ* i
- $\mathcal{L}$ *Klasse der formalen Sprachen*

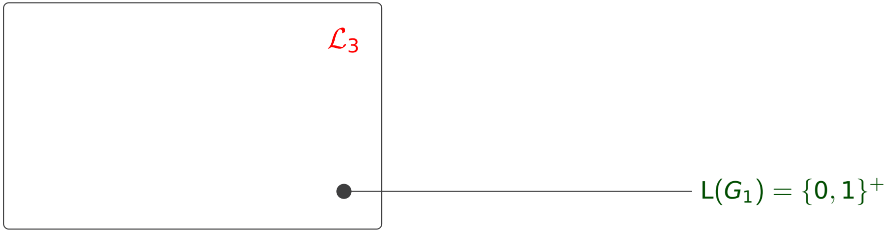
Satz

Eine Sprache L ist kontextsensitiv gdw. L beschränkt ist

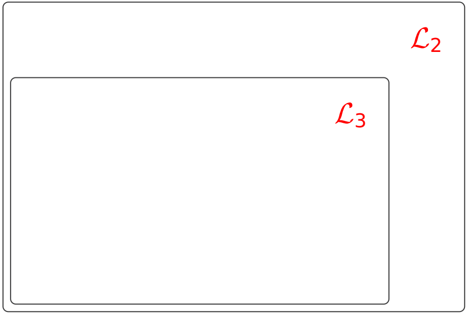
Chomsky-Hierarchie

$\mathcal{L}_3$

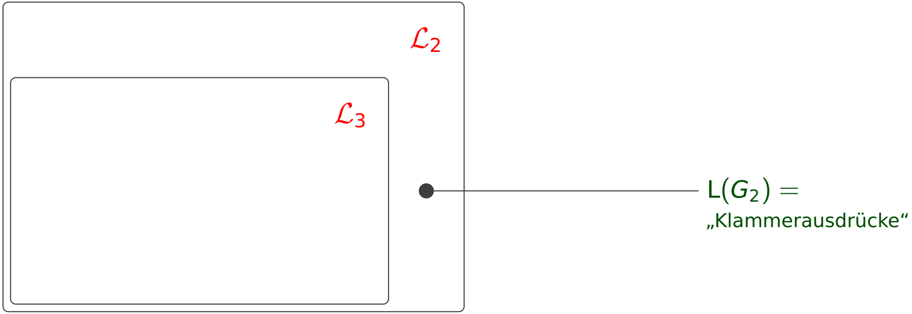
Chomsky-Hierarchie



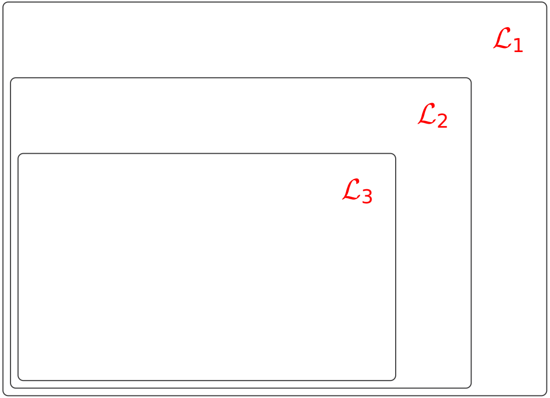
Chomsky-Hierarchie



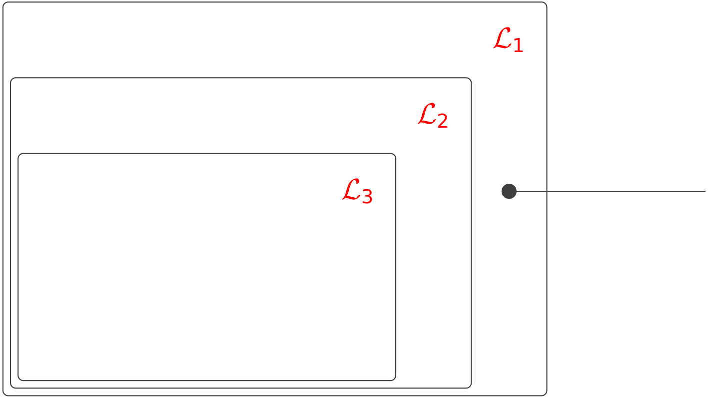
Chomsky-Hierarchie



Chomsky-Hierarchie



Chomsky-Hierarchie

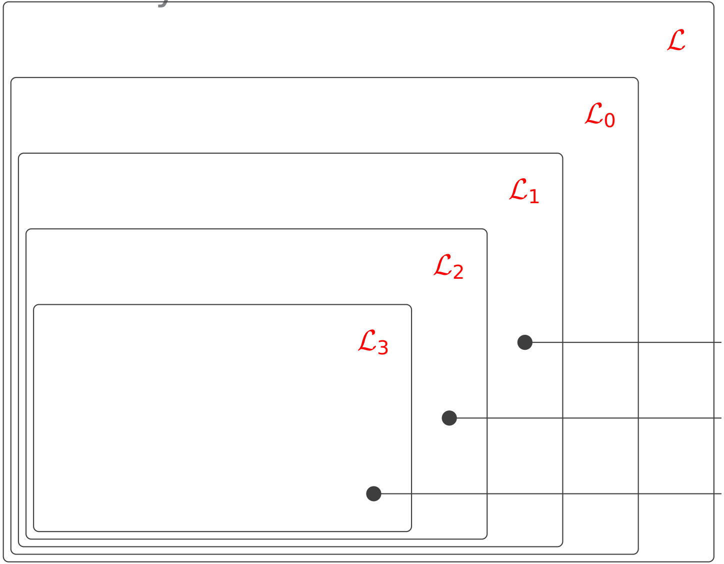


$L(G_3) =$
$\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$

Chomsky-Hierarchie

Chomsky-Hierarchie

Chomsky-Hierarchie



$L(G_3) =$
$\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$

$L(G_2) =$
„Klammerausdrücke“

$L(G_1) = \{0, 1\}^+$