universität
innsbruck

Einführung in die Theoretische Informatik

David Drexel
Julian Fodor
Alexander Lochmann
Georg Moser
Alexander Maringele
David Obwaller
Jonas Schöpf

cbr.uibk.ac.at

universität
innsbruck

Zusammenfassung

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathrm{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathrm{S} \in V$ das Startsymbol von G

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Feedback

Frage zu Aufgabe 3) von SL-Blatt 5: Wie sollte man denn die Sprachen beschreiben? In natürlicher Sprache ist es unexakt. Und wenn man auf eine Menge der Sprache kommt: Wie kann man dann sicher sein, dass es sich bei der erzeugten Sprache tatsächlich um diese Menge handelt? Müsste man das beweisen? Wenn ja: Wie?

Zudem ist es mir schwer gefallen, „leichtere“ Grammatiken für gegebene Sprachen zu finden. Auch hier: Wie kann man sicher sein, dass eine gegebene Grammatik tatsächlich die gesamte Sprache erzeugt? Und wie kann man sicher sein, dass die gefundene Grammatik tatsächlich die „minimalste“ ist?

universität
innsbruck

Reguläre Sprachen

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
  1. lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
  2. Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
  1. lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
  2. Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum Durchsuchen umfangreicher Texte

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
  1. lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
  2. Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum Durchsuchen umfangreicher Texte
- Software zur Verifizierung aller Arten von Systemen, die eine endliche Anzahl verschiedener Zustände besitzen

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
  1. lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
  2. Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum Durchsuchen umfangreicher Texte
- Software zur Verifizierung aller Arten von Systemen, die eine endliche Anzahl verschiedener Zustände besitzen
- Softwarebausteine eines Computerspiels:
  1. Kontrolle von Spielfiguren kann mit Hilfe eines endlichen Automaten implementiert werden
  2. erlaubt eine bessere Modularisierung des Codes

Anwendungen von Endlichen Automaten

- Software zum Entwurf und Testen von digitalen Schaltkreisen (Mealy/Moore Automaten)
- Softwarebausteine eines Compilers, etwa in der lexikalischen Analyse:
  1. lexikalische Scanner („Lexer“) wird mit endlichen Automaten implementiert
  2. Der lexikalische Scanner dient zur Aufteilung des Eingabetextes in logische Einheiten, wie Bezeichner oder Schlüsselwörter
- Software zum Durchsuchen umfangreicher Texte
- Software zur Verifizierung aller Arten von Systemen, die eine endliche Anzahl verschiedener Zustände besitzen
- Softwarebausteine eines Computerspiels:
  1. Kontrolle von Spielfiguren kann mit Hilfe eines endlichen Automaten implementiert werden
  2. erlaubt eine bessere Modularisierung des Codes

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen
- Das Geschäft kann dem Kunden Waren zusenden

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen
- Das Geschäft kann dem Kunden Waren zusenden
- Das Geschäft kann Geld einlösen

Beispiel

Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen
- Das Geschäft kann dem Kunden Waren zusenden
- Das Geschäft kann Geld einlösen
- Die Bank kann Geld überweisen

Beispiel

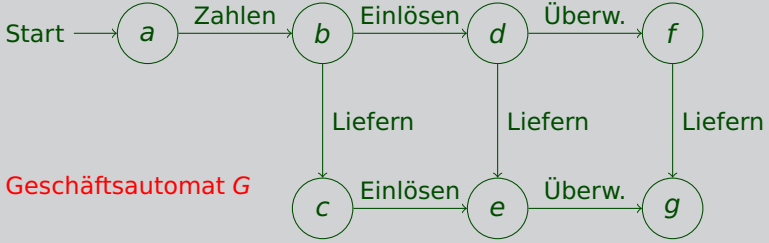
Wir untersuchen Protokolle, die den Gebrauch elektronischen „Geldes“ ermöglichen; dabei handeln: der Kunde, die Bank und das Geschäft:

- Der Kunde kann zahlen
- Der Kunde kann das Geld löschen
- Das Geschäft kann dem Kunden Waren zusenden
- Das Geschäft kann Geld einlösen
- Die Bank kann Geld überweisen

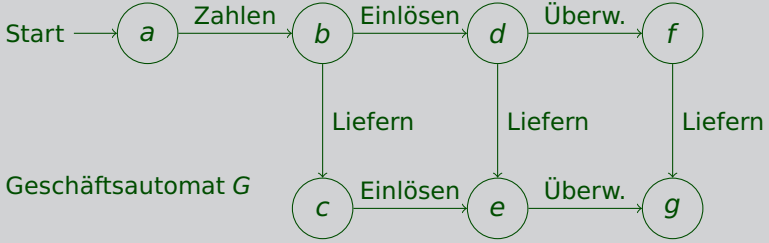
Wir treffen die folgenden Grundannahmen:

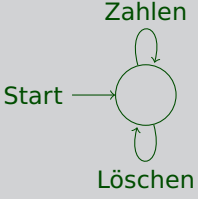
- Der Kunde ist unverantwortlich
- Das Geschäft ist verantwortlich, aber gutgläubig
- Die Bank ist strikt

Beispiel (Fortsetzung)



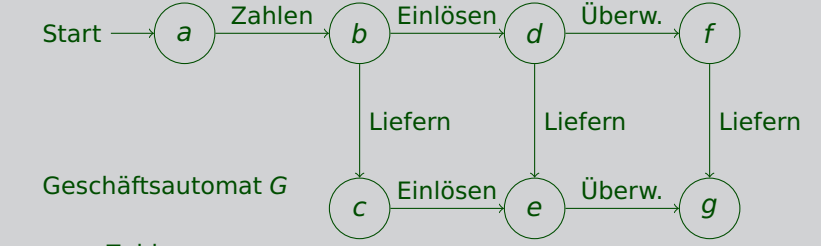
Beispiel (Fortsetzung)

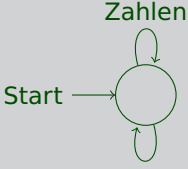




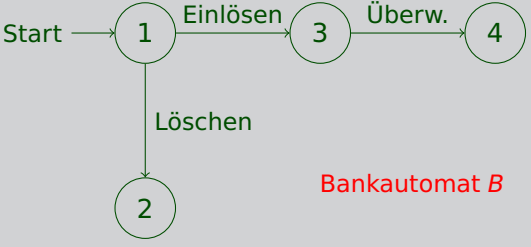
Kundenautomat *K*

Beispiel (Fortsetzung)



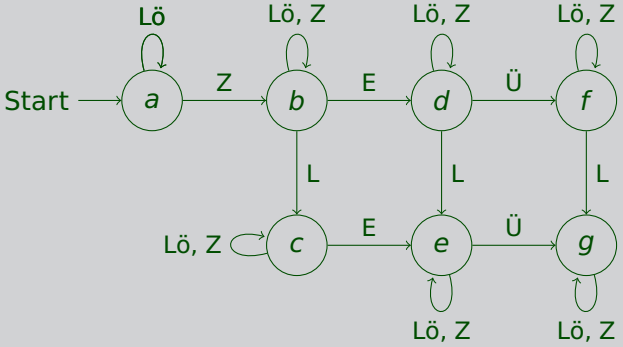


Kundenautomat K

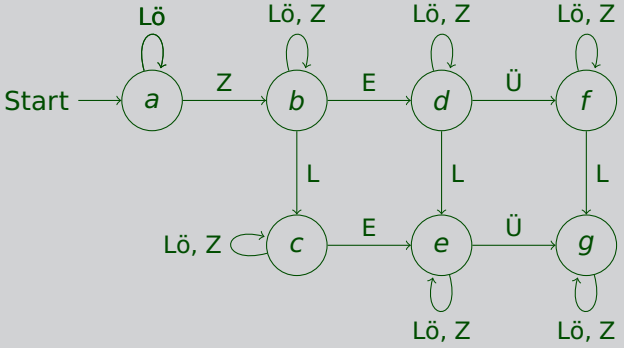


Bankautomat B

Beispiel (Fortsetzung)

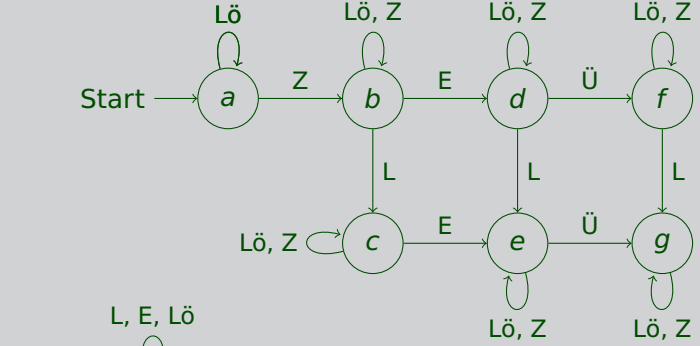


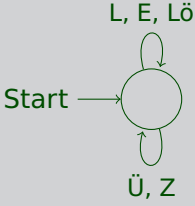
Beispiel (Fortsetzung)



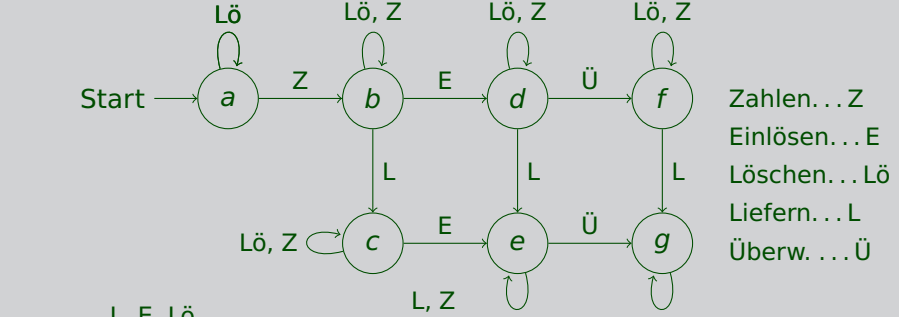
Zahlen. . . Z
Einlösen. . . E
Löschen. . . Lö
Liefern. . . L
Überw. . . . Ü

Beispiel (Fortsetzung)





Beispiel (Fortsetzung)



Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

Betrachte B und G:

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

Betrachte B und G:

- in B gilt, dass aus Zustand 1 durch die Aktion „Einlösen“ Zustand 3 wird, konzise: $1 \xrightarrow{\text{Einlösen}} 3$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

Betrachte B und G:

- in B gilt, dass aus Zustand 1 durch die Aktion „Einlösen“ Zustand 3 wird, konzise: $1 \xrightarrow{\text{Einlösen}} 3$
- in G gilt, dass aus Zustand b mit Aktion „Einlösen“ d wird
  Konzise: $b \xrightarrow{\text{Einlösen}} d$

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

Betrachte B und G:

- in B gilt, dass aus Zustand 1 durch die Aktion „Einlösen“ Zustand 3 wird, konzise: $1 \xrightarrow{\text{Einlösen}} 3$
- in G gilt, dass aus Zustand b mit Aktion „Einlösen“ d wird Konzise: $b \xrightarrow{\text{Einlösen}} d$
- also gilt in $B \times G$, dass aus Zustand $(1, b)$ mit Aktion „Einlösen“ Zustand $(3, d)$ wird

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren den Produktautomaten $B \times G$ aus B und G:

1. Die Zustände dieses Automaten sind:

$$(i, x) \quad \text{wobei } i \in \{1, 2, 3, 4\}, x \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

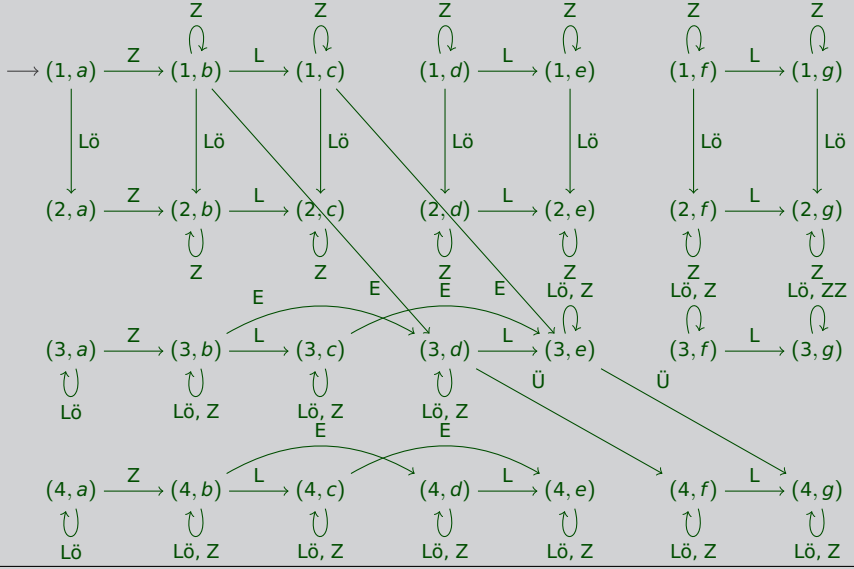
2. Die Übergänge werden durch paralleles Ausführen von B und G definiert:

$$\text{wenn } i \xrightarrow{\text{Aktion}} i' \text{ und } x \xrightarrow{\text{Aktion}} x' \quad \text{dann} \quad (i, x) \xrightarrow{\text{Aktion}} (i', x')$$

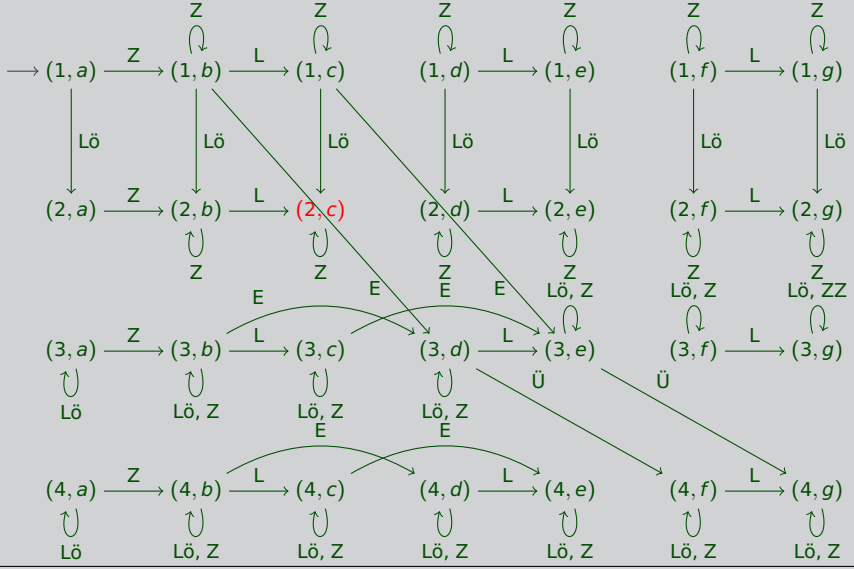
Betrachte B und G:

- in B gilt, dass aus Zustand 1 durch die Aktion „Einlösen“ Zustand 3 wird, konzise: $1 \xrightarrow{\text{Einlösen}} 3$
- in G gilt, dass aus Zustand b mit Aktion „Einlösen“ d wird Konzise: $b \xrightarrow{\text{Einlösen}} d$
- also gilt in $B \times G$, dass aus Zustand $(1, b)$ mit Aktion „Einlösen“ Zustand $(3, d)$ wird, konzise: $(1, b) \xrightarrow{\text{Einlösen}} (3, d)$

Beispiel (Fortsetzung)



Beispiel (Fortsetzung)



Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

> *Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird*

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbole, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbole, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
3. $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbole, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
3. $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion
4. $q_0 \in Q$ der Startzustand

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbole, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
3. $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion
4. $q_0 \in Q$ der Startzustand
5. $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

Beispiel (Fortsetzung)

Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass das Protokoll nicht sicher ist:

> *Der Automat $B \times G$ kann in den Zustand $(2, c)$ gelangen, in welchem die Waren geschickt wurden und trotzdem nie eine Überweisung an das Geschäft erfolgen wird*

Definition (Deterministischer endlicher Automat (kurz: DEA))

Ein DEA ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sodass

1. Q eine endliche Menge von Zuständen
2. Σ eine endliche Menge von Eingabesymbole, (Σ wird auch Eingabealphabet genannt)
3. $\delta \colon Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion
4. $q_0 \in Q$ der Startzustand
5. $F \subseteq Q$ eine endliche Menge von akzeptierenden Zuständen

δ muss für alle möglichen Argumente definiert sein; Vgl. auch Mealy-Moore Automaten

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$	$\cdots$
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	$\cdots$
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$		
$\vdots$	$\vdots$		

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$	$\cdots$
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	$\cdots$
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$		
$\vdots$	$\vdots$		

Zustandsgraph

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA, der Zustandsgraph ist definiert, sodass

1. die Ecken die Zustände sind,
2. für Zustände $p, q \in Q$ sind die Kanten von p nach q alle Tripel

$$(p, a, q) \quad \text{mit} \quad a \in \Sigma \quad \text{und} \quad \delta(p, a) = q$$

Zustandstabelle

	$a_1 \in \Sigma$	$a_2 \in \Sigma$	$\cdots$
$q_1 \in Q$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	$\cdots$
$q_2 \in Q$	$\delta(q_2, a_1)$		
$\vdots$	$\vdots$		

Zustandsgraph

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA, der Zustandsgraph ist definiert, sodass

1. die Ecken die Zustände sind,
2. für Zustände $p, q \in Q$ sind die Kanten von p nach q alle Tripel

$$(p, a, q) \quad \text{mit} \quad a \in \Sigma \quad \text{und} \quad \delta(p, a) = q$$

Konvention

Zu jeder Kante (p, a, q) schreibt man die Eingabe a. Den Startzustand markiert man mit einem Pfeil; die akzeptierenden Zustände werden mit einem doppelten Kreis gekennzeichnet.

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv:

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := q$$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := q$$

$$\widehat{\delta}(q, xa) := \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) \qquad x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := q$$
$$\widehat{\delta}(q, xa) := \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) \qquad x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$$

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die Sprache $\mathrm{L}(A)$ von A:

$$\mathrm{L}(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Definition (erweiterte Übergangsfunktion)

Sei δ eine Übergangsfunktion, wir definieren die erweiterte Übergangsfunktion $\widehat{\delta}\colon Q \times \Sigma^* \to Q$ induktiv:

$$\widehat{\delta}(q, \epsilon) := q$$
$$\widehat{\delta}(q, xa) := \delta(\widehat{\delta}(q, x), a) \qquad x \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$$

Definition

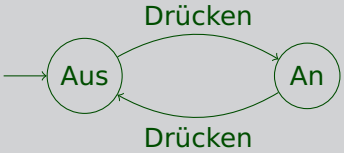
Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA; die Sprache $\mathrm{L}(A)$ von A:

$$\mathrm{L}(A) := \{x \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\}$$

Satz

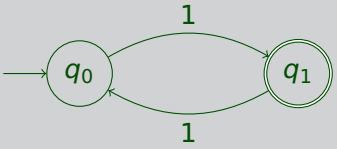
Sei A ein DEA, dann ist $\mathrm{L}(A)$ *regulär und umgekehrt existiert zu jeder regulären Sprache L ein DEA A, sodass* $L = \mathrm{L}(A)$

Beispiel (vgl. Brückenkurs)



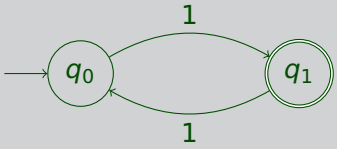
Beispiel

Betrachte den Automaten B:



Beispiel

Betrachte den Automaten B:



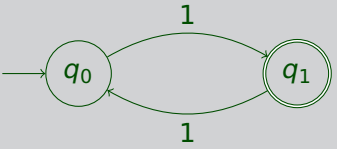
Satz

Die von Automat B akzeptierte Sprache ist gegeben durch

$$\mathrm{L}(B) = \{1^n | n \text{ ungerade}\}$$

Beispiel

Betrachte den Automaten B:



Satz

Die von Automat B akzeptierte Sprache ist gegeben durch

$$\mathrm{L}(B) = \{1^n | n \text{ ungerade}\}$$

Beweis.

Beweis mittels verschränkter Induktion der folgenden beiden Aussagen: $S_1(n)$: Der Automat ist nach n-maligem Drücken im Zustand q_0, gdw. n gerade. bzw. $S_2(n)$: Der Automat ist nach n-maligem Drücken im Zustand q_1, gdw. n ungerade. ■

universität
innsbruck

Kontextfreie Sprachen

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$:

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch

$$0x0 \qquad 1x1$$

Palindrome

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$:

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch

$$0x0 \qquad 1x1$$

Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R:

$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1$$
$$P \to 0P0 \mid 1P1$$

Beispiel

Induktive Definition von Palindromen über $\Sigma := \{0, 1\}$:

1. ϵ, 0, 1 sind Palindrome
2. Wenn x ein Palindrom ist, dann sind auch

$$0x0 \qquad 1x1$$

Palindrome

Wir betrachten die folgenden Regeln R:

$$P \to \epsilon \mid 0 \mid 1$$
$$P \to 0P0 \mid 1P1$$

Die KFG $G_1 = (\{P\}, \Sigma, R, P)$ beschreibt die Sprache der Palindrome:

$L(G_1)$ ist genau die Menge der Palindrome über dem Alphabet Σ

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke x_1, x_2, $\dots$, x_n brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ indem

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke x_1, x_2, $\dots$, x_n brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ indem
   - Expansionen von $X_1, \dots, X_{i-1}$ eliminiert

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke $x_1, x_2, \dots, x_n$ brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \dots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ indem
   - Expansionen von $X_1, \dots, X_{i-1}$ eliminiert
   - Expansionen von $X_{i+1}, \dots, X_n$ eliminiert

Satz (für KFG)

Gelte $A \Rightarrow X_1 X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$, wobei $X_i \in V \cup \Sigma$, $x \in \Sigma^*$; dann können wir x in die Stücke x_1, x_2, $\ldots$, x_n brechen, sodass für alle i: $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$

Hilfsüberlegung

- Wir betrachten: $X_1 X_2 \ldots X_n \overset{*}{\Rightarrow} x$
- Sei $i < j$, dann sind in x alle aus X_i abgeleiteten Satzformen links von den aus X_j abgeleiteten zu finden

Beweis (des Satzes).

1. Wenn $X_i \in \Sigma$, dann $X_i = x_i$ und offensichtlich $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$
2. Wenn $X_i \in V$, dann erhalten wir $X_i \overset{*}{\Rightarrow} x_i$ indem
   - Expansionen von $X_1, \ldots, X_{i-1}$ eliminiert
   - Expansionen von $X_{i+1}, \ldots, X_n$ eliminiert
   - überflüssige Schritte weggelassen werden

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_1, \ldots, w_{k-1} \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow x$$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_1, \ldots, w_{k-1} \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow x$$

Wir argumentieren informell:

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_1, \ldots, w_{k-1} \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, k-2\}$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_1, \ldots, w_{k-1} \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, k-2\}$
- Nach Definition gilt auch $uw_iv \Rightarrow uw_{i+1}v$

Lemma

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und

1. *sei $A \overset{*}{\Rightarrow} x$ eine Ableitung in G*
2. *seien $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$*

Dann ist auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$ eine Ableitung in G

Beweis.

Angenommen es existieren Wörter $w_1, \ldots, w_{k-1} \in (V \cup \Sigma)^*$, sodass

$$A \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_{k-1} \Rightarrow x$$

Wir argumentieren informell:

- Wir betrachten den Schritt $w_i \Rightarrow w_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, k-2\}$
- Nach Definition gilt auch $uw_iv \Rightarrow uw_{i+1}v$
- Die anderen Fälle werden gleich behandelt

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \stackrel{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \stackrel{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$

   Somit gilt $P \stackrel{*}{\Rightarrow} y$, woraus mit Induktionshypothese folgt, y ist ein Palindrom; damit ist aber auch x ein Palindrom

Korrektheit der Grammatik.

Es ist zu zeigen, dass $x \in \mathrm{L}(G)$ gdw. x ein Palindrom ist

Wir zeigen nur: $x \in \mathrm{L}(G)$ impliziert x ist ein Palindrom. Dazu verwenden wir Induktion nach der Länge ℓ der Ableitung $P \stackrel{*}{\Rightarrow} x$

1. Basis $\ell = 1$: Also gilt einer der folgenden 3 Fälle:
   - $x = \epsilon$
   - $x = 0$
   - $x = 1$

   In allen Fällen: x ist Palindrom
2. Schritt $\ell > 1$: Also hat die Ableitung eine der folgenden Gestalten:
   - $P \Rightarrow 0P0 \stackrel{*}{\Rightarrow} 0y0 = x$
   - $P \Rightarrow 1P1 \stackrel{*}{\Rightarrow} 1y1 = x$

   wobei $y \in \Sigma^*$

   Somit gilt $P \stackrel{*}{\Rightarrow} y$, woraus mit Induktionshypothese folgt, y ist ein Palindrom; damit ist aber auch x ein Palindrom ■