1) Erklären Sie die Begriffe *Halbgruppe*, *Monoid* und *Gruppe*.

   Zeigen Sie, dass die Algebra $\langle \Sigma^*; \cdot, \epsilon \rangle$ ein Monoid ist, wobei $\cdot$ der binäre Konkatenationsoperator und ϵ das Leerwort ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Definition von Konkatenation aus der Vorlesung und Induktion über die Länge von Wörtern um Assoziativität zu zeigen.

2) Erklären Sie die Notation $E \vdash s \approx t$ und die Definition einer Inferenzregel der Gleichungslogik.

   Betrachten Sie folgende Menge von Identitäten E:

$$\mathsf{f}(x,y) \approx \mathsf{f}(y,x) \qquad \mathsf{g}(x,y) \approx \mathsf{g}(y,x)$$

$$\mathsf{f}(x,\mathsf{g}(y,z)) \approx \mathsf{g}(\mathsf{f}(x,y),\mathsf{f}(x,z))$$

   Was sagen diese Gleichungen über die Funktionen f und g aus? Verwenden Sie die Inferenzregeln aus Abbildung 2.5 im Skriptum und die Gleichungen E um

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{b},\mathsf{c})) \approx \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{a}))$$

   zu zeigen.

3) Gegeben $F = \{\&\&, \mathsf{T}, \mathsf{F}\}$, $V = \{x\}$ und die folgende Menge von Identitäten E:

$$\mathsf{T} \mathbin{\&\&} x \approx x \qquad\qquad \mathsf{F} \mathbin{\&\&} x \approx \mathsf{F}\,.$$

   Beweisen Sie mithilfe der Inferenzregeln der Vorlesung

$$E \vdash (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T}) \approx ((\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T})) \mathbin{\&\&} \mathsf{T}\,.$$