1) Betrachten Sie die Turingmaschine M welche im folgenden Simulator definiert ist: `http://morphett.info/turing/turing.html?417d522b074cb9937dadab228c042540`. (NB: Abweichend von der Definition in der Vorlesung verfügt M über ein *beidseitig* unendliches Band. Anstelle eines akzeptierenden und verwerfenden Zustandes gibt es nur den haltenden Zustand halt, da wir uns in diesem Beispiel nicht die Frage stellen ob M Eingaben akzeptiert oder verwirft, sondern das Verhalten von M auf einem anfänglich leeren Band untersuchen.)

   Seien Zustände $Q = \{a, b, c, \mathsf{halt}\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathsf{X}\}$, Bandalphabet $\Gamma = \{\sqcup, \mathsf{X}\}$ und die folgende Übergangsfunktion δ:

$p \in Q$	$v \in \Sigma$	$\delta(p, v)$	$p \in Q$	$v \in \Sigma$	$\delta(p, v)$
a	$\sqcup$	(b, X, R)	a	X	$(\mathsf{halt}, \mathsf{X}, R)$
b	$\sqcup$	$(c, \sqcup, R)$	b	X	(b, X, R)
c	$\sqcup$	(c, X, L)	c	X	(c, X, L)

   Zu Beginn sei das gesamte Band in beide Richtungen leer, d.h. mit dem Blanksymbol $\sqcup$ gefüllt und M starte im Zustand a. Wenn Sie den Simulator ausführen, werden Sie feststellen, dass M insgesamt sechs X auf das Band schreibt und dann hält.[1]

   Fügen Sie nun einen weiteren Zustand d hinzu und modifizieren Sie δ entsprechend, um eine Turingmaschine zu konstruieren die mindestens zehn X auf das Band schreibt und hält. Verifizieren Sie Ihre Konstruktion mithilfe des Simulators.

2) Ein Halbaddierer ist ein Schaltnetzwerk mit zwei Eingängen x und y, sowie zwei Ausgängen s und c. Das Netzwerk berechnet die Summe

$$x + y = c\,s$$

   zweier Binärzahlen der Länge 1. Folgende Aussagen beschreiben die Arbeitsweise eines Halbaddierers:

$$c \leftrightarrow x \wedge y$$
$$s \leftrightarrow \neg c \wedge (x \vee y)$$

   a) Verwenden Sie die Methode von Quine, um die Formeln auf Erfüllbarkeit zu testen.

   b) Wie kann das Ergebnis einer Addition, z.B. 0 + 1, aus dem Resultat abgelesen werden?

[1] Die Turingmaschine M ist eine Instanz eines „Busy Beavers“ mit drei Zuständen, siehe `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Busy_beaver&oldid=931091184`.

c) Erweitern Sie den Halbaddierer zu einem Volladdierer, der zusätzlich noch eine dritte Eingabe c_{in} berücksichtigt. Beschreiben Sie informell, wie aus n Volladdierern ein Addierer für Binärzahlen der Länge n erzeugt werden kann.

3) Lösen Sie zumindest eine der folgenden zwei Aufgaben:

a) Betrachten Sie die folgenden Gleichungen über der Signatur $F := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}\}$, wobei a und b die Stelligkeit 0, f die Stelligkeit 2, sowie g und h die Stelligkeit 1 haben:

$$E := \{\mathsf{f}(\mathsf{a}, x) \approx \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x, \mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(x)\}$$

Zeigen Sie $E \vdash \mathsf{g}(\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(\mathsf{a})$

b) Betrachten Sie folgende Menge von Gleichungen mit den Konstanten 0 und 1, den Funktion p und m und den Variablen x und y:

$$E := \{p(x, 0) \approx 1,\ p(x, s(y)) \approx m(x, p(x, y)),\ m(x, 1) \approx x\}\ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Inferenzregeln der Gleichungslogik, dass gilt:

$$E \vdash p(x, s(s(0))) \approx m(x, x)\ .$$