1) *Lösung.* a) Die Aussage $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cap (A \cup C)$ ist nicht allgemeingültig, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: $\{a, b, c\} \setminus (\{a, b\} \setminus \{a\}) = \{a, c\}$, aber $(\{a, b, c\} \setminus \{a, b\}) \cap (\{a, b, c\} \cup \{a\}) = \{c\}$.

b) In beiden Fällen benutzen wir das inklusive Oder, logische Negation und die sog. De Morganschen Gesetze.
Zunächst zeigen wir $A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap C)$:

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \setminus C) &\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \setminus C \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und nicht } x \in B \setminus C \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und nicht } (x \in B \text{ und } x \notin C) \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ oder } x \in C) \\
&\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
&\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\
&\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir $(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$:

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) &\Rightarrow (x \in A \setminus B) \text{ oder } (x \in A \cap C) \\
&\Rightarrow (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und } (x \notin B \text{ oder } x \in C) \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und nicht } (x \in B \text{ und } x \notin C) \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und nicht } x \in B \setminus C \\
&\Rightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \setminus C \\
&\Rightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)
\end{aligned}$$

□

2) *Lösung.* Beweisskizze: Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, die die Aussagen formalisieren erkennt man leicht:

a) Wenn beide Symptome gelten, dann gilt C und möglicherweise D.
b) Wenn nur Symptom S gilt, dann gilt D und möglicherweise C.
c) Wenn nur Symptom T gilt, dann gilt C aber nicht D.
d) Wenn weder S, noch T gelten, dann gilt weder C noch D.

□

3) *Lösung.* **Basis:** $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$$

Induktionsschritt: $n > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^k &= 2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 && \text{(Induktionshypothese einsetzen)} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1
\end{aligned}$$

$\square$