1) Die Grammatik G beschreibt die Sprache $\{ab\} \cup \{a^n c b^n | n > 0\}$.

Folgende Turing Maschine M akzeptiert $L(G)$:

$M = (\{s, t, r, q_f, q_{ff}, q_a, q_b, q_c, q_\sqcup, q_\vdash\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \{\vdash, \sqcup, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ mit δ wie folgt

$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$	$p \in Q$	$a \in \Gamma$	$\delta(p, a)$
q_a	$\sqcup$	$(q_\sqcup, \sqcup, \mathrm{L})$	q_a	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(q_a, *, \mathrm{R})$
q_b	$\vdash$	$(q_\vdash, \vdash, \mathrm{R})$	q_b	$* \in \Gamma \setminus \{\vdash\}$	$(q_b, *, \mathrm{L})$
q_c	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{R})$	q_c	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
$q_\sqcup$	b	$(q_b, \sqcup, \mathrm{L})$	$q_\sqcup$	$* \in \Gamma \setminus \{\mathsf{b}\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
s	$\vdash$	$(s, \vdash, \mathrm{R})$	q_f	b	$(q_{ff}, \sqcup, \mathrm{R})$
s	a	$(q_f, \vdash, \mathrm{R})$	q_f	$* \in \Sigma \setminus \{\mathsf{b}\}$	$(q_a, *, \mathrm{R})$
s	$* \in \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \sqcup\}$	$(r, *, \mathrm{R})$	q_f	$* \in \Gamma \setminus \Sigma$	$(r, *, \mathrm{R})$
$q_\vdash$	a	$(q_a, \vdash, \mathrm{R})$	q_{ff}	$\sqcup$	$(t, \sqcup, \mathrm{R})$
$q_\vdash$	c	$(q_c, \sqcup, \mathrm{R})$	q_{ff}	$* \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$	$(r, *, \mathrm{R})$
$q_\vdash$	$* \in \{\mathsf{b}, \sqcup, \vdash\}$	$(r, *, \mathrm{R})$			
t	$* \in \Gamma$	$(t, *, \mathrm{R})$	r	$* \in \Gamma$	$(r, *, \mathrm{R})$

Wir haben den folgenden Satz in der Vorlesung kennengelernt:

Sei L eine Sprache, die von einer TM akzeptiert wird. Dann ist L rekursiv aufzählbar.

Da unsere TM M die Sprache $L(G)$ akzeptiert, ist $L(G)$ rekursiv aufzählbar.

2) *Lösung.* a)

$$1, 3, 2, 4, 4, 3$$

b) Wir nehmen an, dass ein $m > 0$ und Indizes existieren, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}$. Wir unterscheiden folgende Fälle:

i. Sei $i_1 = 1$ oder $i_1 = 3$, dann gilt für alle $m > 0$, dass $|x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}| \neq |y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}|$, d.h $x \neq y$.

ii. Sei $i_1 = 2$, dann gilt $101 x_{i_2} \dots x_{i_m} \neq 100 y_{i_2} \dots y_{i_m}$.

Unabhängig von der Wahl für i_1 stimmen die Zeichenfolgen nicht überein. Daher ist unsere Annahme falsch und es existiert keine Lösung.

□

3) *Lösung.* Gegeben sind die Wörter $x_1, \dots, x_n$. Wir nehmen an das das Zeichen # in keinem Wort vorkommt.

Wir definieren unsere Grammatik G wie folgt:

$$S \to x_i A i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \tag{1}$$

$$A \to x_i A i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \tag{2}$$

$$A \to \# \tag{3}$$

Wobei S der start Zustand ist. Die Duplizierung der Regeln (1 und 2) dient nur dazu das $\# \notin L(G)$. Betrachten sie auch das wir die Indexe nicht im Dezimalsystem Darstellen, sondern pro Zahl ein Zeichen (sonst könnten wir die Indexe nicht eindeutig vergleichen, z.B. zwei Einser und Elf).

$\square$