1) *Lösung.* Die folgende Registermaschine realisiert diese Berechnung:

$$
\begin{array}{l}
\text{while } x_2 \neq 0 \text{ do} \\
\quad x_2 := x_2 - 1; \\
\quad x_1 := x_1 - 1 \\
\text{end}; \\
\\
\text{while } x_3 \neq 0 \text{ do} \\
\quad x_3 := x_3 - 1 \\
\text{end}; \\
\\
\text{while } x_1 \neq 0 \text{ do} \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad x_3 := x_3 + 1; \\
\quad x_3 := x_3 + 1 \\
\text{end}
\end{array}
$$

Die erste Schleife subtrahiert x_2 von x_1, wobei das Ergebnis nachher in x_1 steht und $x_2 = 0$ gilt. Falls $x_2 > x_1$, könnte scheinbar ein negativer Wert in x_1 stehen. Das wird jedoch von der Maschine selbst verhindert. Der kleinstmögliche Wert eines Registers ist demnach 0. Also funktioniert diese Registermaschine nur korrekt, falls $x_2 \leqslant x_1$. Die zweite Schleife sorgt dafür, dass x_3 auf 0 gesetzt wird. In der dritten Schleife wird jeweils x_1 dekrementiert und x_3 zweimal inkrementiert. Dadurch steht nach Ausführung dieser Schleife das Doppelte der vorigen Differenz in x_3, wobei in x_1 und x_2 jeweils 0 steht.

□

2) *Lösung.* Wir geben eine in polynomieller Zeit berechenbare Abbildung $R\colon \{a,b\}^* \to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ an, sodass $x \in A \Leftrightarrow R(x) \in B$. Wir wählen $R(a) = \mathtt{0}$ und $R(b) = \mathtt{0}$. Somit wird ein Wort aus $\{a,b\}^n$ in $\mathtt{0}^n$ umgewandelt. Genau dann wenn n gerade ist, ist $\mathtt{0}^n$ ein Palindrom gerader Länge. Tabellarisch ergibt sich:

$x \in A$	x	$R(x)$	$R(x) \in B$
✓	ϵ	ϵ	✓
×	a	0	×
×	b	0	×
✓	aa	00	✓
✓	ab	00	✓
✓	ba	00	✓
✓	bb	00	✓
×	aaa	000	×
⋮	⋮	⋮	⋮

□

3) *Lösung.* In Abbildung 1 finden Sie die Beweisbäume für die Hoare-Tripel (Q_1, P_1, R_1) und (Q_3, P_3, R_3). Beim Hoare-Tripel (Q_2, P_2, R_2) betrachten wir die Vorbedingung $\{\mathsf{false}\}$, aus welcher wir alles schließen können. D.h. das Programm P_2 ist korrekt bezüglich der Vorbedingung Q_2 und Nachbedingung R_2.

□

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{a}]^1
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1-1=0\}\ x_1 := x_1-1\ \{x_1=0\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1-1\ \{x_1=0\}}\,[\mathrm{a}]^2
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\{\mathsf{od}(x_1+1)\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{od}(x_1)\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{od}(x_1)\}}\,[\mathrm{a}]^3
}{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1-1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{od}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1-1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{od}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

[1] mit $(x_1=0) \models (x_1+1=1)$
[2] mit $(x_1=1) \models (x_1-1=0)$
[3] mit $(x_1=0) \models (\mathsf{od}(x_1+1))$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=1\}}\,[\mathrm{a}]^1
\qquad \Phi
}{\{x_1=0\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\{x_1+1=2\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[\mathrm{z}]}{\{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1\ \{x_1=2\}}\,[\mathrm{a}]^2
\qquad \Psi
}{\Phi := \{x_1=1\}\ x_1 := x_1+1; x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{s}]
$$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\{\mathsf{ist\_prim}(x_1+1)\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{z}]}{\Psi := \{x_1=2\}\ x_1 := x_1+1\ \{\mathsf{ist\_prim}(x_1)\}}\,[\mathrm{a}]^3
$$

[1] mit $(x_1=0) \models (x_1+1=1)$
[2] mit $(x_1=1) \models (x_1+1=2)$
[3] mit $(x_1=2) \models (\mathsf{ist\_prim}(x_1+1))$

Abbildung 1: Beweisbäume für Aufgabe 3