

1) *Lösung.* Man zeigt die folgenden zwei Aussagen mit *verschränkter vollständiger Induktion*:

- $S_1(n)$: Der Automat ist nach n -maligem Drücken im Zustand „Aus“, gdw. n gerade.
- $S_2(n)$: Der Automat ist nach n -maligem Drücken im Zustand „An“, gdw. n ungerade.

In der Folge bezeichnen wir den Automaten mit A . Nun zeigen wir die Aussagen.

Basis $n = 0$ Da S_1, S_2 Aussagen der Gestalt „genau dann, wenn“ sind, müssen wir insgesamt vier Teilfälle betrachten: $(S_1(0), \Rightarrow), (S_1(0), \Leftarrow), (S_2(0), \Rightarrow), (S_2(0), \Leftarrow)$. Dabei bezeichnet zB $(S_1(0), \Rightarrow)$ die Aussage $S_1(0)$ in der Richtung von links nach rechts, das heißt

(1)

„Wenn der Automat A nach 0-maligem Drücken im Zustand ‚Aus‘ ist, dann ist 0 gerade“ .

Diese Aussage (1) ist natürlich richtig, da 0 eine gerade Zahl ist. Ähnlich einfach folgen die anderen 3 Fälle.

Induktionsschritt $n > 0$ Wiederum müssen wir vier Fälle betrachten $(S_1(n+1), \Rightarrow), (S_1(n+1), \Leftarrow), (S_2(n+1), \Rightarrow), (S_2(n+1), \Leftarrow)$, wobei wir die Aussagen $S_1(n)$ und $S_2(n)$ als Induktionshypothese (IH) voraussetzen dürfen. Exemplarisch betrachten wir die Aussagen $(S_2(n+1), \Leftarrow)$

(2)

„Wenn $n+1$ ungerade ist, dann ist A nach $n+1$ -maligem Drücken im Zustand ‚An‘“ .

Auch die Aussage (2) folgt (fast) unmittelbar. Wir nehmen an $n+1$ ist ungerade, also ist n gerade. Mit Hilfe der IH $S_1(n)$ wissen wir also, dass A nach n -maligem Drücken im Zustand „Aus“ war. Somit ist A nach $n+1$ -maligem Drücken im Zustand „An“ wzbw.¹

□

2) *Lösung.* Prämisse 1: Das Erst' wär so, das Zweite so, und drum das Dritt' und Vierte so.

Prämisse 2: Das Erst' und Zweit' nicht wär.

Schluss: Das Dritt' und Viert' war nimmermehr.”

¹was zu beweisen war

a)

- | | | |
|----|-------------------------------------|------------|
| 1. | $E \wedge Z \rightarrow D \wedge V$ | Prämisse 1 |
| 2. | $\neg(E \wedge Z)$ | Prämisse 2 |
| 3. | $\neg(D \wedge V)$ | Schluss |

b) Dies ist keine Konsequenzrelation da $v(D) = T$, $v(V) = T$, $v(E) = T$ und $v(Z) = F$ macht die Prämissen wahr, jedoch den Schluss falsch.

Note: Im Stück Faust spricht Mephistopheles die Zeilen des Auszuges. Dieser Fehlschluss ist öfters auffindbar (bereits die Stoa weist darauf hin) und Mephistopheles verbreitet von Natur aus Lügen, daher wäre es durchaus möglich, dass Goethe sich dessen bewusst war.

□

3) *Lösung.* a) Diese Formel ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

b) Diese Formel ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

c) Diese Formel ist eine Tautologie.

d) Diese Formel ist nicht erfüllbar und somit auch keine Tautologie.

□