1) *Lösung.* Die Algebra $\langle \Sigma^*; \cdot, \epsilon \rangle$ ist Monoid wenn $\langle \Sigma^*; \cdot \rangle$ eine Halbgruppe und ϵ das neutrale Element ist. Letzteres folgt direkt aus der Definition der Konkatenation.

Wir zeigen, dass für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

mit Hilfe von Induktion über die Länge von z.

1. Basis: $|z| = 0$.

Da $|z| = 0$ kommt für z nur das Leerwort ϵ in Frage.

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot y) \cdot \epsilon \\ &= x \cdot y \\ &= x \cdot (y \cdot \epsilon) \\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

2. Basis: $|z| = 1$. Sei daher $z = a$ mit $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot y) \cdot a \\ &= (x \cdot y)a \\ &= x \cdot ya \\ &= x \cdot (y \cdot a) \\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

Hier unterscheiden wir zwischen der Konkatenation von Wörtern (mit dem $\cdot$ Operator geschrieben) und dem anhängen eines Symbols an ein Wort (ohne Operator geschrieben).

Schritt: $|z| = n > 1$

Sei $z = wa$ mit $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^{n-1}$. Als Induktionshypothese verwenden wir

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

für alle $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $|z| < n$. Das erlaubt uns wie folgt umzuformen.

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot y) \cdot (w \cdot a) \\ &= ((x \cdot y) \cdot w) \cdot a && \text{I.H. mit } |a| < n \\ &= (x \cdot (y \cdot w)) \cdot a && \text{I.H. mit } |w| < n \\ &= x \cdot ((y \cdot w) \cdot a) && \text{I.H. mit } |a| < n \\ &= x \cdot (y \cdot (w \cdot a)) && \text{I.H. mit } |a| < n \\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass $\cdot$ assoziativ und $\langle \Sigma^*; \cdot \rangle$ eine Halbgruppe ist. $\square$

2) *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y, z)) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{f}(x, z)) \in E}{\mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y, z)) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(x, y), \mathsf{f}(x, z))}\,[\mathsf{a}]}{\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}(\mathsf{b}, \mathsf{c})) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{c}))}\,[\mathsf{i}], \sigma_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) = \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b})}\,[\mathsf{r}] \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(x, y) = \mathsf{f}(y, x) \in E}{\mathsf{f}(x, y) = \mathsf{f}(y, x)}\,[\mathsf{a}]}{\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{c}) = \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{a})}\,[\mathsf{i}], \sigma_2}{\mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{c})) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{a}))}\,[\mathsf{k}]}{\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{g}(\mathsf{b}, \mathsf{c})) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{a}))}\,[\mathsf{t}]$$

Substitutionen:

- $\sigma_1 := \{x \mapsto \mathsf{a}, y \mapsto \mathsf{b}, z \mapsto \mathsf{c}\}$
- $\sigma_2 := \{x \mapsto \mathsf{a}, y \mapsto \mathsf{c}\}$

$\square$

3) *Lösung.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x} \in E}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x}}\,[\mathrm{a}]}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F} \approx \mathsf{F}}\,[\mathrm{i}], \sigma_{\mathsf{F}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{F} \in E}{\mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{F}}\,[\mathrm{a}]}{\mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{T} \approx \mathsf{F}}\,[\mathrm{i}], \sigma_{\mathsf{T}}}{\mathsf{F} \approx \mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{T}}\,[\mathrm{s}]}{E \vdash \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F} \approx \mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{T}}\,[\mathrm{t}] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x} \in E}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x}}\,[\mathrm{a}]}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F} \approx \mathsf{F}}\,[\mathrm{i}], \sigma_{\mathsf{F}}}{\mathsf{F} \approx \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}}\,[\mathrm{s}] \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x} \in E}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x}}\,[\mathrm{a}]}{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T} \approx \mathsf{T}}\,[\mathrm{i}], \sigma_{\mathsf{T}}}{\mathsf{T} \approx \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T}}\,[\mathrm{s}]}{E \vdash \mathsf{F} \mathbin{\&\&} \mathsf{T} \approx (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T})}\,[\mathrm{k}]}{E \vdash \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F} \approx (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T})}\,[\mathrm{t}] \quad \dfrac{\dfrac{\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x} \in E}{E \vdash \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{x} \approx \mathsf{x}}\,[\mathrm{a}]}{E \vdash \mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T} \approx \mathsf{T}}\,[\mathrm{i}], \sigma_{\mathsf{T}}}{E \vdash (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T}) \approx ((\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{F}) \mathbin{\&\&} (\mathsf{T} \mathbin{\&\&} \mathsf{T})) \mathbin{\&\&} \mathsf{T}}\,[\mathrm{k}]$$

Hier verwenden wir:

- $\sigma_{\mathsf{T}} := \{x \mapsto \mathsf{T}\}$
- $\sigma_{\mathsf{F}} := \{x \mapsto \mathsf{F}\}$

$\square$