1) M ist ein sogenannter 3-Zustand fleißiger Bieber, d.h. es existiert keine Turingmaschine mit gleichem Alphabet und gleicher Anzahl von Zuständen, welche mehr Symbole auf ein anfänglich leeres Band schreibt und hält.

   Durch Erweiterung um Zustand d und angepasstem δ hier ein 4-Zustand fleißiger Bieber der insgesamt 13 Symbole schreibt: `http://morphett.info/turing/turing.html?b62a920257761dd1b7f85df72e0460af`

2) *Lösung.* a) Zuerst schreiben wir die zwei Formeln um:

$$A = c \to x \land y$$
$$B = x \land y \to c$$
$$C = s \to \neg c \land (x \lor y)$$
$$D = \neg c \land (x \lor y) \to s$$

Dann führen wir die Methode von Quine für die Formel $A \land B \land C \land D$ durch, siehe Abbildung 1.

b) Wir betrachten im Baum die Pfade mit den Entscheidungen $x = y = \mathsf{T}$, welche die Formel erfüllen. Auf diesen Pfaden können wir die Belegung von c und s ablesen.

c) Ein Volladdierer addiert zwei Binärzahlen und berücksichtigt dabei einen möglichen Übertrag, d.h. wir haben die Variablen x, y, c_{in} und c_{out}.

$$s \leftrightarrow x \oplus y \oplus c_{\mathsf{in}}$$
$$c_{\mathsf{out}} \leftrightarrow (x \land y) \lor (c_{\mathsf{in}} \land (x \oplus y))$$

Wir können mehrere Volladdierer kombinieren, um längere Binärzahlen zu addieren.

$$s_0 \leftrightarrow x_0 \oplus y_0$$
$$c_0 \leftrightarrow x_0 \land y_0$$
$$s_1 \leftrightarrow x_1 \oplus y_1 \oplus c_0$$
$$c_1 \leftrightarrow (x_1 \land y_1) \lor (c_0 \land (x_1 \oplus y_1))$$
$$s_2 \leftrightarrow x_2 \oplus y_2 \oplus c_1$$
$$c_2 \leftrightarrow (x_2 \land y_2) \lor (c_1 \land (x_2 \oplus y_2))$$
$$\ldots$$

```
(((c -> x & y) & (x & y -> c)) & (s -> ~c & (x | y))) & (~c & (x | y) -> s)
  [x->F]: (((c -> F & y) & (F & y -> c)) & (s -> ~c & (F | y))) & (~c & (F | y) -> s)
    [y->F]: (((c -> F & F) & (F & F -> c)) & (s -> ~c & (F | F))) & (~c & (F | F) -> s)
          = ((c -> F & F) & (F & F -> c)) & (s -> ~c & (F | F))
      [c->F]: ((F -> F & F) & (F & F -> F)) & (s -> ~F & (F | F)) = ~s
        *[s->F]: ~F = T
        *[s->T]: ~T = F
      *[c->T]: ((T -> F & F) & (F & F -> T)) & (s -> ~T & (F | F)) = F
    [y->T]: (((c -> F & T) & (F & T -> c)) & (s -> ~c & (F | T))) & (~c & (F | T) -> s)
      [c->F]: (((F -> F & T) & (F & T -> F)) & (s -> ~F & (F | T))) & (~F & (F | T) -> s) = s
        *[s->F]: F
        *[s->T]: T
      *[c->T]: (((T -> F & T) & (F & T -> T)) & (s -> ~T & (F | T))) & (~T & (F | T) -> s) = F
  [x->T]: (((c -> T & y) & (T & y -> c)) & (s -> ~c & (T | y))) & (~c & (T | y) -> s)
    [y->F]: (((c -> T & F) & (T & F -> c)) & (s -> ~c & (T | F))) & (~c & (T | F) -> s)
      [c->F]: (((F -> T & F) & (T & F -> F)) & (s -> ~F & (T | F))) & (~F & (T | F) -> s) = s
        *[s->F]: F
        *[s->T]: T
      *[c->T]: (((T -> T & F) & (T & F -> T)) & (s -> ~T & (T | F))) & (~T & (T | F) -> s) = F
    [y->T]: (((c -> T & T) & (T & T -> c)) & (s -> ~c & (T | T))) & (~c & (T | T) -> s)
      *[c->F]: (((F -> T & T) & (T & T -> F)) & (s -> ~F & (T | T))) & (~F & (T | T) -> s) = F
      [c->T]: (((T -> T & T) & (T & T -> T)) & (s -> ~T & (T | T))) & (~T & (T | T) -> s) = ~s
        *[s->F]: ~F = T
        *[s->T]: ~T = F
```

Abbildung 1: $A \wedge B \wedge C \wedge D$

$\square$

3) a) *Lösung.* Ein Beweisbaum für $\{\mathsf{f}(\mathsf{a},x) \approx \mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(x)\} \vdash \mathsf{g}(\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(\mathsf{a})$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(\mathsf{a},x) \approx \mathsf{g}(x) \in E}{E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{a},x) \approx \mathsf{g}(x)}\,(\text{ a })}{E \vdash \mathsf{g}(x) \approx \mathsf{f}(\mathsf{a},x)}\,(\text{ s })}{E \vdash \mathsf{g}(\mathsf{b}) \approx \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b})}\,(\text{ i, } x \to \mathsf{b}\text{ }) \qquad \dfrac{\dfrac{\mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(x) \in E}{E \vdash \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(x)}\,(\text{ a })}{E \vdash \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(\mathsf{a})}\,(\text{ i, } x \to \mathsf{a}\text{ })}{E \vdash \mathsf{g}(\mathsf{b}) \approx \mathsf{h}(\mathsf{a})}\,(\text{ t })$$

$\square$

b) *Lösung.* Rechts neben jedem Querstrich im Beweisbaum sind jeweils die verwendeten Regeln aus den Folien. Aus Platzgründen teilen wir den Beweisbaum in drei Teile auf:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x,s(y)) \approx m(x,p(x,y)) \in E}{E \vdash p(x,s(y)) \approx m(x,p(x,y))}\,(\text{a})}{E \vdash p(x,s(s(0))) \approx m(x,p(x,s(0)))}\,(\sigma = \{y \mapsto s(0)\}) \qquad \dfrac{[1]}{E \vdash m(x,p(x,s(0))) \approx m(x,x)}}{E \vdash p(x,s(s(0))) \approx m(x,x)}\,(\text{t})$$

[1]:

$$\dfrac{\dfrac{}{E \vdash x \approx x}\,(\text{r}) \qquad \dfrac{\dfrac{[2]}{E \vdash p(x,s(0)) \approx m(x,1)} \qquad \dfrac{m(x,1) \approx x \in E}{E \vdash m(x,1) \approx x}\,(\text{a})}{E \vdash p(x,s(0)) \approx x}\,(\text{t})}{E \vdash m(x,p(x,s(0))) \approx m(x,x)}\,(\text{k})$$

[2]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x,s(y)) \approx m(x,p(x,y)) \in E}{E \vdash p(x,s(y)) \approx m(x,p(x,y))}\,(\text{a})}{E \vdash p(x,s(0)) \approx m(x,p(x,0))}\,(\sigma = \{y \mapsto 0\}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{E \vdash x \approx x}\,(\text{r}) \quad \dfrac{p(x,0) \approx 1 \in E}{E \vdash p(x,0) \approx 1}\,(\text{a})}{E \vdash m(x,p(x,0)) \approx m(x,1)}\,(\text{k})}{E \vdash p(x,s(0)) \approx m(x,1)}\,(\text{t})$$

$\square$

Wir können nun die Funktion p als die Potenzfunktion über den natürlichen Zahlen interpetieren, m als die Multiplikation, s als $x \mapsto x+1$ und 0 und 1 als die entsprechenden natürlichen Zahlen. Diese Interpretation erfüllt die drei Axiome in E und somit gilt dort auch

$$x^{1+(1+0)} = x \cdot x.$$