□

1. Grammatiken und Formale Sprachen

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R, S)$, wobei R:

$$S \to \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B$$
$$A \to \mathtt{a}BA \mid \epsilon$$
$$B \to \mathtt{b}AB \mid \epsilon$$

- Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:
  - □ G ist rechtslinear.
  - □ G ist kontextfrei.
  - □ G ist kontextsensitiv.
  - □ G ist beschränkt.
- Geben Sie eine Linksableitung für `aabb` an.
- Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G' an mit der Signatur $(\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, R, S)$ welche dieselben Wörter wie G mit einem `c` am Ende akzeptiert:

$$L(G') = \{w\mathtt{c} \mid w \in L(G)\}$$

Solution:

Lösung:

- Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:
  - □ G ist rechtslinear, weil $A \to aBA$ und $B \to bAB$ die Bedingung $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$ verletzen.
  - □ (RICHTIG) G ist kontextfrei.
  - □ G ist kontextsensitiv, weil bei $A \to \epsilon$ und $B \to \epsilon$ $|\epsilon| \not\geq 1$ und $A \neq S \neq B$.
  - □ G ist beschränkt, weil bei $A \to \epsilon$ und $B \to \epsilon$ die Bedingung 1 ($|P| \leq |Q|$) sowie die Bedingung 2 ($P = S$) verletzt wird.
- $S \Rightarrow_l \mathtt{a}A \Rightarrow_l \mathtt{aa}BA \Rightarrow_l \mathtt{aab}ABA \Rightarrow_l \mathtt{aab}BA \Rightarrow_l \mathtt{aabb}BAB \Rightarrow_l \mathtt{aabb}AB \Rightarrow_l \mathtt{aabb}B \Rightarrow_l \mathtt{aabb}$.
- R :

$$S \to \mathtt{a}A\mathtt{c} \mid \mathtt{b}B\mathtt{c}$$
$$A \to \mathtt{a}BA \mid \epsilon$$
$$B \to \mathtt{b}AB \mid \epsilon$$

2. Beweisen Sie folgende Aussage in dem in der Vorlesung vorgestellten Kalkül des natürlichen Schließens NK: $\vdash (p \lor (p \land q)) \to p$

Solution:

1	$p \lor (p \land q)$	Annahme
2	p	Annahme
3	$p \land q$	Annahme
4	p	$\land$: e 3
5	p	$\lor$: e 1,2,3–4
6	$(p \lor (p \land q)) \to p$	$\to$: i 1–5

	Einführung	*Elimination*
$\land$	$\dfrac{A \quad B}{A \land B}\ \land\text{: i}$	$\dfrac{A \land B}{A}\ \land\text{: e} \qquad \dfrac{A \land B}{B}\ \land\text{: e}$
$\lor$	$\dfrac{A}{A \lor B}\ \lor\text{: i} \qquad \dfrac{B}{A \lor B}\ \lor\text{: i}$	$\dfrac{A \lor B \quad \boxed{\begin{matrix}A\\ \vdots\\ C\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}B\\ \vdots\\ C\end{matrix}}}{C}\ \lor\text{: e}$
$\to$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}A\\ \vdots\\ B\end{matrix}}}{A \to B}\ \to\text{: i}$	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\ \to\text{: e}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}A\\ \vdots\\ \mathsf{False}\end{matrix}}}{\neg A}\ \neg\text{: i}$	$\dfrac{A \quad \neg A}{\mathsf{False}}\ \neg\text{: e}$
False		$\dfrac{\mathsf{False}}{A}\ \mathsf{False}\text{: e}$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg\text{: e}$

3. Betrachten Sie folgende TM $M = (\{s, c_a, m_r, c_b, m_l, t, r\}, \{a, b\}, \{a, b, \vdash, \sqcup\}, \delta, s, t, r)$. Vervollständigen Sie die Tabelle für die Übergangsfunktion δ so, dass M die Sprache

$$L(M) = \{a^n b^m \mid 0 < n < m\}$$

akzeptiert.

δ	$\vdash$	a	b	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$		(r, b, R)	
c_a	$(r, \vdash, R)$			$(r, \sqcup, R)$
m_r	$(r, \vdash, R)$	(m_r, a, R)	(m_r, b, R)	$(c_b, \sqcup, L)$
c_b	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)		
m_l	$(r, \vdash, R)$	(m_l, a, L)	(m_l, b, L)	$(c_a, \sqcup, R)$
t	$(t, \vdash, R)$		(t, b, R)	$(t, \sqcup, R)$
r	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	(r, b, R)	

Solution: Die folgende, originle Lösung der Aufgabe ist inkorrekt:

δ	$\vdash$	a	b	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
c_a	$(r, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(t, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
m_r	$(r, \vdash, R)$	(m_r, a, R)	(m_r, b, R)	$(c_b, \sqcup, L)$
c_b	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	$(m_l, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, R)$
m_l	$(r, \vdash, R)$	(m_l, a, L)	(m_l, b, L)	$(c_a, \sqcup, R)$
t	$(t, \vdash, R)$	(t, a, R)	(t, b, R)	$(t, \sqcup, R)$
r	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$

Diese Turing Machine akzeptiert die Sprache $L(M) = \{a^n bwb^n \mid w \in \{a,b\}^\star, n > 0\}$.

Folgend werden zwei Möglichkeiten gegeben wie eine korrekte Turing Machine aussehen könnte. Die erste Variante würde in den gegebenen Rahmen passen, verletzt jedoch die in der Vorlesung besprochene Zusatzbedingung, dass eine Turing Machine ihren akzeptierenden und verwerfenden Zustand nicht mehr verlässt. Während gezeigt werden kann, dass eine solche Turing Machine equivalent ist zu der in der Vorlesung besprochenen, ist es eine ungewöhnliche Formulierung und damit ist die erste Lösung keine Lösung im eigentlichen Sinn.

Die zweite Lösung verwendet einen zusätzlichen Zustand, welcher überprüft, dass nur noch b's folgen bevor der Lesekopf ein $\sqcup$ erreicht. Nachdem die Turing Machine b's vom rechten Ende des Wortes weg überschreibt, kann beim ersten Auftreten eines $\sqcup$s in den akzeptierenden Zustand gewechselt werden. Diese Lösung kann man mit der in der Vorlesung gegebenen Definition vereinbaren, benötigt jedoch einen zusätzlichen Zustand.

TM M_1 :

δ	$\vdash$	a	b	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
c_a	$(r, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(t, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
m_r	$(r, \vdash, R)$	(m_r, a, R)	(m_r, b, R)	$(c_b, \sqcup, L)$
c_b	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	$(m_l, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, R)$
m_l	$(r, \vdash, R)$	(m_l, a, L)	(m_l, b, L)	$(c_a, \sqcup, R)$
t	$(t, \vdash, R)$	(r, a, R)	(t, b, R)	$(t, \sqcup, R)$
r	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$

TM M_2 :

δ	$\vdash$	a	b	$\sqcup$
s	$(s, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
c_a	$(r, \vdash, R)$	$(m_r, \sqcup, R)$	(c_f, b, R)	$(r, \sqcup, R)$
m_r	$(r, \vdash, R)$	(m_r, a, R)	(m_r, b, R)	$(c_b, \sqcup, L)$
c_b	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	$(m_l, \sqcup, L)$	$(r, \sqcup, R)$
m_l	$(r, \vdash, R)$	(m_l, a, L)	(m_l, b, L)	$(c_a, \sqcup, R)$
c_f	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	(c_f, b, R)	$(t, \sqcup, R)$
t	$(t, \vdash, R)$	(t, a, R)	(t, b, R)	$(t, \sqcup, R)$
r	$(r, \vdash, R)$	(r, a, R)	(r, b, R)	$(r, \sqcup, R)$

4. Welche Sätze sind wahr und welche nicht? Achtung: Minuspunkte für falsche Antworten!

   - Es existiert keine aussagenlogische Formel, die sowohl in KNF als auch in DNF ist. **F**
   - Für jedes Wort in einer rechts-linearen Sprache, existiert ein Syntaxbaum dessen Blätter, gelesen von links nach rechts, das Wort ergeben. **T**
   - $\epsilon \in \Sigma^+$ für $\Sigma = \emptyset$. **F**
   - Es gibt für jede beliebige beschränkte Sprache L eine Turing Machine, welche L akzeptiert. **T**
   - Registermaschinen sind durch das Vorhandensein von WHILE-Schleifen strikt mächtiger als Turingmaschinen. **F**
   - Es ist bewießen, dass jede berechenbare Funktion auf einer Turing Machine simuliert werden kann. **F**