Einführung in die Theoretische Informatik

Christian Dalvit   Manuel Eberl
Samuel Frontull   **Cezary Kaliszyk**   Daniel Ranalter

Wintersemester 2022/23

universität innsbruck

Zusammenfassung

Wintersemester 2022/23

Zusammenfassung: Isomorphie

Definition

Seien $\mathcal{A} = \langle A; \circ_1, \ldots, \circ_m \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B; \odot_1, \ldots, \odot_m \rangle$ Algebren, dann heißt eine Abbildung $\varphi \colon A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn gilt

Zusammenfassung: Isomorphie

Definition

Seien $\mathcal{A} = \langle A; \circ_1, \dots, \circ_m \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B; \odot_1, \dots, \odot_m \rangle$ Algebren, dann heißt eine Abbildung $\varphi \colon A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn gilt

- φ ist bijektiv

Zusammenfassung: Isomorphie

Definition

Seien $\mathcal{A} = \langle A; \circ_1, \dots, \circ_m \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B; \odot_1, \dots, \odot_m \rangle$ Algebren, dann heißt eine Abbildung $\varphi \colon A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn gilt

- φ ist bijektiv
- für alle Operationen $\circ_i$ von $\mathcal{A}$ ($\circ_i$ n-stellig) gilt:

$$\varphi(\circ_i(a_1, \dots, a_n)) = \odot_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) ,$$

  für alle $a_1, \dots, a_n \in A$.

Zusammenfassung: Isomorphie

Definition

Seien $\mathcal{A} = \langle A; \circ_1, \dots, \circ_m \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B; \odot_1, \dots, \odot_m \rangle$ Algebren, dann heißt eine Abbildung $\varphi \colon A \to B$ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn gilt

- φ ist bijektiv
- für alle Operationen $\circ_i$ von $\mathcal{A}$ ($\circ_i$ n-stellig) gilt:

$$\varphi(\circ_i(a_1, \dots, a_n)) = \odot_i(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) \ ,$$

  für alle $a_1, \dots, a_n \in A$.

Definition

Eine Algebra $\mathcal{A} = \langle A; \circ_1, \dots, \circ_m \rangle$ heißt isomorph zur Algebra $\mathcal{B} = \langle B; \odot_1, \dots, \odot_m \rangle$, wenn ein Isomorphismus $\varphi \colon A \to B$ existiert. Wir schreiben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Zusammenfassung der letzten LVA

Definition (Alphabet)

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht leere Menge von Symbolen

Definition (Wort)

- Eine Zeichenreihe (ein Wort, ein String) ist eine endliche Folge von Symbolen über einem Alphabet Σ
- Die leere Zeichenreihe wird mit ϵ bezeichnet

Definition

Eine Teilmenge L von Σ^* heißt eine formale Sprache über Alphabet Σ

Bemerkung

Die Algebra $\langle \Sigma^*; \cdot, \epsilon \rangle$ ist ein Monoid; das Wortmonoid

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Algebraische Strukturen, Boolesche Algebra, Universelle Algebra

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie und Komplexitätstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen, Komplexitätstheorie

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Einführung in die Logik

Syntax & Semantik der Aussagenlogik, Formales Beweisen, Konjunktive und Disjunktive Normalformen

Einführung in die Algebra

Algebraische Strukturen, Boolesche Algebra, Universelle Algebra

Einführung in die Theorie der Formalen Sprachen

Grammatiken und Formale Sprachen, Chomsky-Hierarchie, Reguläre Sprachen, Kontextfreie Sprachen, Anwendungen von formalen Sprachen

Einführung in die Berechenbarkeitstheorie und Komplexitätstheorie

Algorithmisch unlösbare Probleme, Turing Maschinen, Registermaschinen, Komplexitätstheorie

Einführung in die Programmverifikation

Prinzipien der Analyse von Programmen, Verifikation nach Hoare

Grammatiken und Formale Sprachen

Wintersemester 2022/23

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\mathsf{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv}\\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter}\\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender}\\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein}\\
\text{Verb} &\to \text{ist}\\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathsf{S} \overset{*}{\Rightarrow}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\mathsf{S} \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\text{S} \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{Unser Nomen Verb Adjektiv}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\text{S} \stackrel{*}{\Rightarrow} \text{Unser Lehrveranstaltungsleiter Verb Adjektiv}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\text{S} \overset{*}{\Rightarrow} \text{Unser Lehrveranstaltungsleiter ist Adjektiv}$$

Grammatiken und Formale Sprachen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{S} &\to \text{Pronomen Nomen Verb Adjektiv} \\
\text{Nomen} &\to \text{Lehrveranstaltungsleiter} \\
\text{Nomen} &\to \text{Vortragender} \\
\text{Pronomen} &\to \text{Unser} \mid \text{Mein} \\
\text{Verb} &\to \text{ist} \\
\text{Adjektiv} &\to \text{lästig} \mid \text{nett} \mid \text{streng} \mid \text{monoton} \mid \text{anspruchsvoll}
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\text{S} \overset{*}{\Rightarrow} \text{Unser Lehrveranstaltungsleiter ist anspruchsvoll}$$

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $S \in V$ das Startsymbol von G

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathrm{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathrm{S} \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $\mathsf{S} \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

P nennen wir auch die Prämisse und Q die Konklusion der Regel

Definition

Eine Grammatik G ist ein Quadrupel $G = (V, \Sigma, R, S)$, wobei

1. V eine endliche Menge von Variablen (oder Nichtterminale)
2. Σ ein Alphabet, die Terminale, $V \cap \Sigma = \varnothing$
3. R eine endliche Menge von Regeln
4. $S \in V$ das Startsymbol von G

Eine Regel ist ein Paar $P \to Q$ von Wörtern, sodass $P, Q \in (V \cup \Sigma)^*$ und in P mindestens eine Variable vorkommt

P nennen wir auch die Prämisse und Q die Konklusion der Regel

Konvention

- Variablen werden groß geschrieben, Terminale klein
- Statt $P \to Q_1$, $P \to Q_2$, $P \to Q_3$ schreiben wir $P \to Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:

$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$

2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G **direkt ableitbar**, wenn gilt:
$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$
2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Definition (Ableitbar)

Wir sagen y ist aus x in G **ableitbar**, wenn $k \in \mathbb{N}$ und $w_0, w_1, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, sodass

$$x = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = y$$

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine Grammatik und seien $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition

1. Wir sagen y ist aus x in G direkt ableitbar, wenn gilt:
$$\exists\, u, v \in (V \cup \Sigma)^*,\ \exists\, (P \to Q) \in R \ \text{ sodass } \ (x = uPv \text{ und } y = uQv)$$
2. In diesem Fall schreiben wir kurz $x \underset{G}{\Rightarrow} y$
3. Wenn G aus dem Kontext folgt schreiben wir $x \Rightarrow y$

Definition (Ableitbar)

Wir sagen y ist aus x in G ableitbar, wenn $k \in \mathbb{N}$ und $w_0, w_1, \ldots, w_k \in (V \cup \Sigma)^*$ gibt, sodass

$$x = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_k = y$$

Wir schreiben $x \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} y$, beziehungsweise $x \overset{*}{\Rightarrow} y$

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Definition (Sprache einer Grammatik)

Die Menge aller Sätze

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x\}$$

heißt die von der Grammatik G erzeugte Sprache

Sprache einer Grammatik

Definition

- Die vom Startsymbol S ableitbaren Wörter heißen Satzformen
- Elemente von Σ^* heißen Terminalwörter
- Satzformen, die Terminalwörter sind, heißen Sätze

Definition (Sprache einer Grammatik)

Die Menge aller Sätze

$$\mathrm{L}(G) = \{x \in \Sigma^* \mid \mathrm{S} \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x\}$$

heißt die von der Grammatik G erzeugte Sprache

Zwei Grammatiken G_1 und G_2 heißen äquivalent, wenn $\mathrm{L}(G_1) = \mathrm{L}(G_2)$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Beispiel

- Die Grammatik $G_1 = (\{B\}, \{0, 1\}, R, B)$ ist rechtslinear, wobei R wie folgt definiert:

$$B \to 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B$$

Klassen von Grammatiken

Definition (rechtslinear)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt rechtslinear, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in \Sigma^* \cup \Sigma^+ V$

Beispiel

- Die Grammatik $G_1 = (\{B\}, \{0, 1\}, R, B)$ ist rechtslinear, wobei R wie folgt definiert:

$$B \to 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B$$

- Es gilt:

$$\mathrm{L}(G_1) = \{0, 1\}^+$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:
$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$
- Es gilt:

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K)$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K) \Rightarrow ()(KK)$$

Definition (kontextfrei)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextfrei, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. $P \in V$
2. $Q \in (V \cup \Sigma)^*$

Beispiel

- Die Grammatik $G_2 = (\{K\}, \{(,)\}, R, K)$ ist kontextfrei, wobei R wie folgt definiert:

$$K \to \epsilon \mid (K) \mid KK$$

- Es gilt:

$$K \Rightarrow KK \Rightarrow (K)K \Rightarrow (\epsilon)K = ()K \Rightarrow ()(K) \Rightarrow ()(KK) \overset{*}{\Rightarrow} ()(()(()))$$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

2. oder $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

2. oder $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition (kontextsensitiv)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt kontextsensitiv, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder es existieren $u, v, w \in (V \cup \Sigma)^*$ und $A \in V$, sodass

$$P = uAv \text{ und } Q = uwv \text{ wobei } |w| \geqslant 1$$

2. oder $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Beispiel

$G_3 = (\{\mathsf{S}, B, C, H\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, R, \mathsf{S})$ ist kontextsensitiv, wobei R:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\mathsf{S} & \to & \mathsf{a}\mathsf{S}BC \mid \mathsf{a}BC & HC & \to & BC & \mathsf{b}C & \to & \mathsf{bc} \\
CB & \to & HB & \mathsf{a}B & \to & \mathsf{ab} & \mathsf{c}C & \to & \mathsf{cc} \\
HB & \to & HC & \mathsf{b}B & \to & \mathsf{bb} & & &
\end{array}$$

$\mathrm{L}(G_3) = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \mid n \geqslant 1\}$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Beispiel

Die Grammatik $G_4 = (\{\mathsf{S}, X, Y, T\}, \{\mathsf{a}\}, R, \mathsf{S})$ sei wie folgt definiert:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathsf{S} & \to & YT \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{aa} & X\mathsf{a} & \to & \mathsf{aa}X \\
Y & \to & XY \mid \mathsf{aa} & X\mathsf{a}T & \to & \mathsf{aa}T \\
 & & & X\mathsf{aa}T & \to & \mathsf{aaaa}
\end{array}
$$

Definition (beschränkt)

Grammatik $G = (V, \Sigma, R, \mathsf{S})$ heißt beschränkt, wenn für alle Regeln $P \to Q$ gilt:

1. entweder $|P| \leqslant |Q|$ oder
2. $P = \mathsf{S}$ und $Q = \epsilon$

Wenn $\mathsf{S} \to \epsilon \in G$, dann kommt S nicht in einer Konklusion vor

Beispiel

Die Grammatik $G_4 = (\{\mathsf{S}, X, Y, T\}, \{\mathsf{a}\}, R, \mathsf{S})$ sei wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S} &\to YT \mid \mathsf{a} \mid \mathsf{aa} & \qquad X\mathsf{a} &\to \mathsf{aa}X \\
Y &\to XY \mid \mathsf{aa} & X\mathsf{a}T &\to \mathsf{aa}T \\
 & & X\mathsf{aa}T &\to \mathsf{aaaa}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{L}(G_4) = \{\mathsf{a}^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextfrei (vom Typ 2)
  wenn $\exists$ kontextfreie Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextfrei (vom Typ 2)
  wenn $\exists$ kontextfreie Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextsensitiv (vom Typ 1)
  wenn $\exists$ kontextsensitive Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- regulär (vom Typ 3)
  wenn $\exists$ rechtslineare Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextfrei (vom Typ 2)
  wenn $\exists$ kontextfreie Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- kontextsensitiv (vom Typ 1)
  wenn $\exists$ kontextsensitive Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Bemerkung

- formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$
- Grammatik ist endliche Beschreibung von L
- Art der Beschreibung bestimmt Typ der Sprache

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- *$\mathcal{L}_i$ die Klasse der Sprachen von Typ i*
- *$\mathcal{L}$ Klasse der formalen Sprachen*

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- $\mathcal{L}_i$ *die Klasse der Sprachen von Typ* i
- $\mathcal{L}$ *Klasse der formalen Sprachen*

Definition

Eine formale Sprache L heißt

- beschränkt wenn $\exists$ beschränkte Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$
- rekursiv aufzählbar (vom Typ 0)
  wenn $\exists$ Grammatik G, $L = \mathrm{L}(G)$

Satz (Chomsky-Hierarchie)

Es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}$$

- $\mathcal{L}_i$ *die Klasse der Sprachen von Typ* i
- $\mathcal{L}$ *Klasse der formalen Sprachen*

Satz

Eine Sprache L ist kontextsensitiv gdw. L beschränkt ist