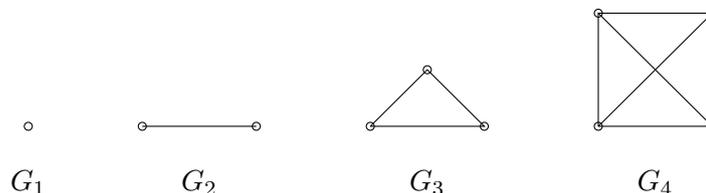


1) Erklären Sie das *Prinzip der vollständigen Induktion* in eigenen Worten.

Auf einer Feier treffen sich  $n$  Personen, und jede Person gibt jeder anderen die Hand. Paul ist frustriert, denn er ist hungrig. Nach seiner Berechnung müssen  $(n \cdot (n - 1))/2$  oft die Hände geschüttelt werden, bevor das Festessen beginnen kann.

Paulina korrigiert Paul, nach Ihrer Berechnung werden genau  $\sum_{i=1}^n (i - 1) = 0 + 1 + \dots + (n - 1)$  mal die Hände geschüttelt. Sie sagt, dies sei ganz leicht zu sehen: Betrachte die  $n$  Personen als Knoten  $V_n := \{1, \dots, n\}$  eines *vollständiger, ungerichteter Graph*  $G_n = (V_n, E_n)$ . Eine (*ungerichtete*) *Kante* aus  $E_n$  zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  symbolisiert dass sich Person  $i$  und Person  $j$  die Hand gegeben haben. Das Ergebnis folgt dann mit einer einfachen Induktion über  $n$ .

Für  $n = 1, \dots, 4$ , können die Graphen  $G_n$  wie folgt dargestellt werden:



Pauls kleiner Bruder meint: aber streitet euch doch nicht, eine simple Induktion zeigt doch auch dass Ihr beide recht habt.

Zeigen Sie nun folgendes:

a) Paulina hat recht.

Sei  $S(n)$  die Aussage: ein vollständiger, ungerichteter Graph mit  $n$  Knoten hat  $\sum_{i=1}^n (i - 1)$  Kanten.

Zeigen Sie mit vollständigen Induktion dass  $S(n)$  für alle  $n \geq 1$  gilt. Verwenden Sie die Notation  $\#E_n$  für die Anzahl der Kanten im Graphen  $G_n$ .

b) Paul hat recht.

Sei  $R(n)$  die Aussage:  $\sum_{i=1}^n (i - 1) = (n \cdot (n - 1))/2$ . Zeigen Sie dass  $R(n)$  für alle  $n \geq 1$  gilt.

2) Welche der folgenden Schlussfiguren sind korrekt?

*Sokrates ist ein Mensch.*

a) *Keine Menschen sind Philosophen.*  
*Sokrates ist kein Philosoph.*

*Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.*

b) *Die Straße ist nass.*  
*Es regnet.*

- c) *Die Sahara ist kein Feuchtgebiet.  
Alle Wüsten sind keine Feuchtgebiete.  
Die Sahara ist eine Wüste.*
- d) *Der Großglockner ist der höchste Berg in Tirol.  
Tirol ist in Österreich.  
Der Großglockner ist der höchste Berg Österreichs.*
- e) *Wenn A, dann B.  
A gilt nicht.  
Also gilt B auch nicht.*