Dieser Übungszettel dient der Vorbereitung auf die anstehenden SL- und VO-Prüfungen und behandelt die wichtigsten Themen die in diesem Semester behandelt wurden.

1) Prüfen Sie folgende Formeln mit Hilfe der *Methode von Quine* auf die Eigenschaften Unerfüllbarkeit, Erfüllbarkeit sowie Tautologie.

   a) $(p \to q) \land (p \land \neg q)$
   b) $(p \to q) \lor (p \land \neg q)$
   c) $(p \to q) \land (p \land \neg r)$
   d) $(p \to q) \lor (p \land \neg r)$

2) Nennen Sie zwei Gesetze der *Booleschen Algebra*.

   Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ eine Boolesche Algebra. Betrachten Sie die folgenden Gesetze und verifizieren Sie diese.

   a) Für alle $a \in B$: $a \cdot a = a$ und $a + a = a$.
   b) Für alle $a \in B$: $0 \cdot a = 0$ und $1 + a = 1$.
   c) Für alle $a, b \in B$: $a + ab = a$, $a(a + b) = a$, $a + \overline{a}b = a + b$ und $a(\overline{a} + b) = ab$.

3) Zeigen Sie die Gültigkeit einer der beiden Formeln

   a) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
   b) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

   in NK.

4) Gegeben sei die reguläre Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{die Anzahl der } \mathsf{a}\text{'s in } w \text{ ist ein Vielfaches von } 4\}$$

   über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$.

   a) Finden Sie eine Grammatik, welche diese Sprache erzeugt.
   b) Konstruieren Sie einen Automaten, der diese Sprache akzeptiert.

5) Betrachten Sie die (kontextfreie) Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, R, S)$ mit den Regeln

$$\begin{aligned} S &\to \mathsf{a}B \mid \mathsf{b}A \\ A &\to \mathsf{a} \mid \mathsf{a}S \mid \mathsf{b}AA \\ B &\to \mathsf{b} \mid \mathsf{b}S \mid \mathsf{a}BB \end{aligned}$$

   und das Wort $x = \mathsf{aababb}$.

a) Geben Sie eine *Linksableitung* für x in G an.

b) Geben Sie eine *Rechtsableitung* für x in G an.

c) Ist G *eindeutig*?

d) Zeigen Sie mit Hilfe der rekursiven Inferenz, dass $x \in \mathsf{L}(G)$.

e) Geben Sie einen Syntaxbaum für G mit Wurzel S und Ergebnis x an.

6) Beachten Sie die folgende kontextsensitive Grammatik $G = (\{S,T\},\{a,b,c\},R,S)$ mit den Regeln R:

$$
\begin{aligned}
S &\to aTb \mid ab \\
aT &\to aaTb \mid ac
\end{aligned}
$$

Konstruieren Sie eine Turing Maschine, welche die Sprache $L(G)$ akzeptiert.

Ist die Sprache $L(G)$ rekursiv aufzählbar?

7) Implementieren Sie die Instruktion

$$\text{IF } x_i \text{ THEN } p_1 \text{ ELSE } p_2 \text{ END}$$

basierend auf den verfügbaren Instruktionen einer Registermaschine. Wenn $x_1 > 0$ soll das Programm p_1 ausgeführt werden, sonst p_2. Es ist nicht notwendig den Zustand von x_i zu speichern.

Hinweis: Beachten Sie, dass x_i auch größer als 1 sein kann.

8) Betrachen Sie die folgenden beiden Sprachen.

$$
\begin{aligned}
L &= \{x \in \{a,b\}^* \mid \ell(x) \text{ ist gerade}\} \text{ und} \\
M &= \{x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid x \text{ ist ein Palindrom gerader Länge}\}\,.
\end{aligned}
$$

Geben Sie eine Reduktion R an, die in polynomieller Zeit berechenbar ist, sodass gilt $L \leqslant^{\mathrm{p}} M$.

9) Bestimmen Sie welche der folgenden Aussagen wahr beziehungsweise falsch sind.

Aussage	**Ja**	**Nein**
Eine Formel A ist eine Tautologie genau dann, wenn $\neg A$ erfüllbar ist.	☐	☐
Sei G eine beliebige Grammatik. Wenn $A \overset{*}{\Rightarrow} x$, dann auch $uAv \overset{*}{\Rightarrow} uxv$.	☐	☐
Wenn $M \leq_T L$ und L entscheidbar, dann ist M entscheidbar	☐	☐
NP ist die Klasse der Sprachen, die einen polytime Verifikator haben	☐	☐
Wenn L und $\sim L$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L unentscheidbar.	☐	☐