1) Was ist eine Boolesche Algebra? Welche Gesetze müssen erfüllt sein damit eine Algebra eine boolsche Algebra ist?

   Wir betrachten die Mengenalgebra $\langle \mathcal{P}(M); \cup, \cap, \sim, \varnothing, M \rangle$, welche eine Boolesche Algebra ist. Wir vervollständigen einen Teil des Beweises von den Folien zur Vorlesung. Zeigen Sie dazu, dass folgende Aussagen im Bezug auf die Mengenalgebra gelten:

   a) Seien $A, B, C \subseteq M$, dann gilt

   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

   b) $\langle \mathcal{P}(M), \cap, M \rangle$ ist ein kommutatives Monoid

2) Betrachten Sie die Boolsche Algebra (siehe Definition 3.12 und Lemma 3.6 im Scriptum)

   $$\mathcal{B} = \langle \mathbb{B}^3; +, \cdot, \sim, (0,0,0), (1,1,1) \rangle$$

   Nach dem Darstellungssatz von Stone (Satz 3.2 im Scriptum) existiert eine Menge M, sodass $\mathcal{B}$ isomorph zur Mengenalgebra $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P}(M); \cup, \cap, \sim, \varnothing, M \rangle$ ist. Finden Sie eine Menge M und definieren Sie einen Isomorphismums $\varphi \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ (siehe auch Folie 18 in Woche 5).

3) *Mittels welcher Eigenschaften ist eine Boolesche Algebra definiert?*

   Wir betrachten die n-fache kartesische Algebra

   $$\langle \mathbb{B}^n; +, \cdot, \sim, (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1) \rangle \ .$$

   Wir haben bereits gesehen, dass die binäre Algebra eine Boolesche Algebra ist. Weiters ist nicht schwer einzusehen dass sowohl $\langle \mathbb{B}^n; +, (0, \ldots, 0) \rangle$ als auch $\langle \mathbb{B}^n; \cdot, (1, \ldots, 1) \rangle$ kommutative Monoide darstellen.

   Beweisen Sie nun unter diesen Voraussetzungen, dass die Algebra des kartesischen Produkts tatsächlich eine Boolesche Algebra ist.

4) Sei $\mathcal{B} = \langle B; +, \cdot, \sim, 0, 1 \rangle$ eine Boolesche Algebra. Zeigen oder widerlegen Sie:

   a) $(\sim(p \cdot q) + p + q) \cdot r = r$

   b) $\sim(p + q) \cdot p \cdot q + r = r$